

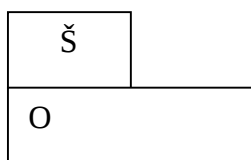
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Komentáre a riešenia úloh domáceho kola pre
žiakov základných škôl
a nižších ročníkov osemročných gymnázií

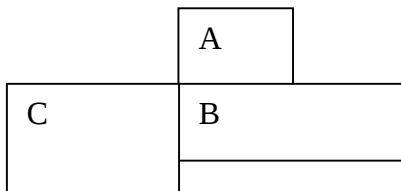
Komentáre MOZ 4
RNDr. Monika Dillingerová

Z4-I-1Zadanie

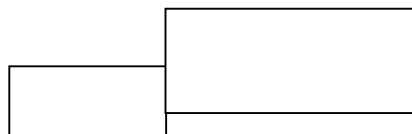
Keď sa dva obdĺžniky skamarátia, pritisnú sa stranami k sebe tak, aby mali aspoň jeden vrchol spoločný.



Tu sa kamaráti
obdĺžnik Š
s obdĺžnikom O.



Tu sa kamaráti obdĺžnik A s obdĺžnikom B a obdĺžnik B s obdĺžnikom C, ale nie obdĺžnik A s obdĺžnikom C.



Tieto dva
obdĺžniky sa
neskamarátili.

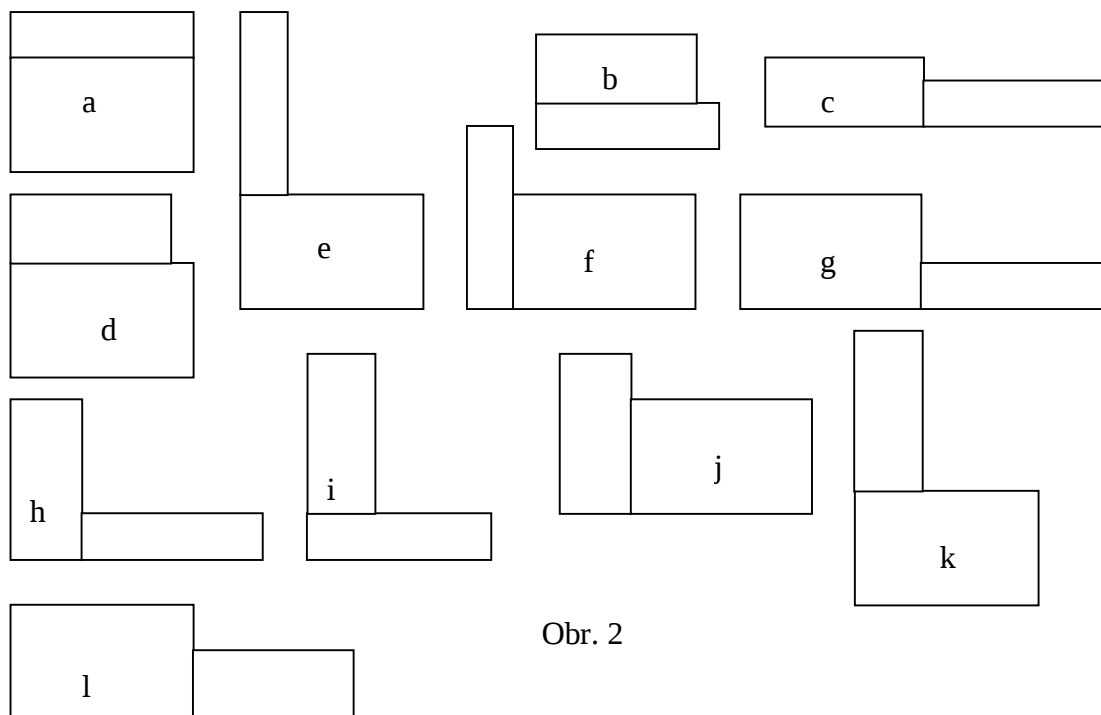
Obr. 1

Minule sa skamarátili 3 obdĺžniky – každý s každým. Prvý mal rozmery $3\text{ cm} \times 7\text{ cm}$, druhý $5\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ a tretí $2\text{ cm} \times 8\text{ cm}$. Aký najväčší obvod môže mať obrazec, ktorý skamarátením spolu vytvorili?

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Obvod obdĺžnika (NÚ A, B) sa tu dopĺňa témou obvodu obrazca (NÚ C, D). Najväčším úskalím sa však môže stať už samotné pochopenie definície skamarátenia sa (NÚ E, F).



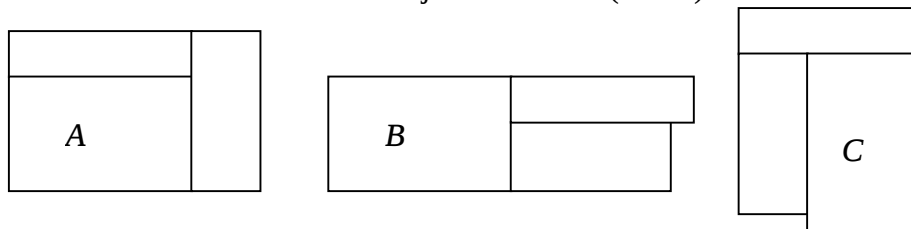
Obr. 2

Keďže ide o úlohu na maximum, je dôležité aj úplné prehľadávanie možností. (NÚ G).

Stručné riešenie:

Ak sa skamarátia dva obdĺžniky, vytvoria buď obdĺžnik alebo obrazec tvaru L. Treba spájať jednotlivé dvojice obdĺžnikov (Obr. 2) a skúšať, či sa ten tretí dá k nim pripojiť.

Tretí obdĺžnik sa dá pripojiť v prípadoch a-h-j, d-f-i, b-g-l. Trojpísmenkové značenie je použité, lebo vo všetkých troch prípadoch vyjde (až na otočenie a preklopenie) taký istý obrazec. Dostali sme teda nasledujúce možnosti (obr. 3).



Obr. 3

Ešte musíme vypočítať a porovnať obvody týchto útvarov.

$$o_A = 8 + 3 + 7 + 3 + 8 + 2 + 5 = 36 \text{ cm}$$

$$o_B = 8 + 7 + 3 + 1 + 2 + 8 + 8 + 5 = 42 \text{ cm}$$

$$o_C = 3 + 1 + 5 + 8 + 2 + 8 + 2 + 7 = 36 \text{ cm}$$

Najväčší obvod - 42 cm má teda obrazec B.

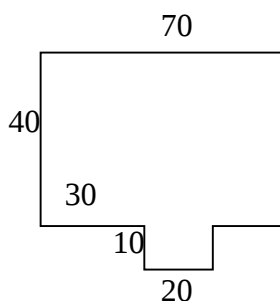
Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Deti pravdepodobne nakreslia útvar s maximálnym obvodom a tento obvod vypíšu. Pre úplnosť riešenia je však potrebné uviesť všetky tri možné útvary aj s obvody. Pre výpočty obvodov by mali byť útvary rysované, alebo musia obsahovať zápis dĺžok jednotlivých strán.

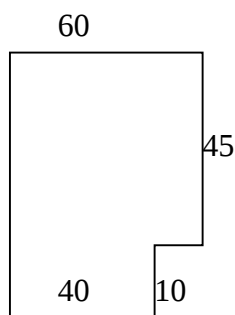
Návodné úlohy:

- Igor maľuje bielu čiaru okolo ihriska tvaru obdĺžnika so stranami dĺžok 12 m a 6 m. Aká dlhá bude celá jeho čiara? Z koľkých rovných čiar bude pozostávať?
- Majka, Viki a Dana skáču gumu. Keď ich guma nie je napnutá, meria iba 220 cm. Keď ju napnú na skákanie, tvorí obvod obdĺžnika a má 460 cm. Aký široký je ten obdĺžnik, ak dievčatá stoja od seba 180 cm ďaleko? (Dĺžka obdĺžnika je 180 cm.)
- Doplň do obrázkov č. 4, 5, 6 všetky chýbajúce rozmery: (Pozor, na obrázkoch nie sú dodržané dĺžky podľa zapísaných rozmerov, takže sa nedá nič merať!)

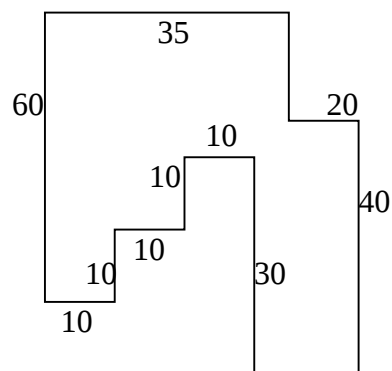
(Prevzaté z komentárov MO Z4, 52. ročník)



Obr. 4

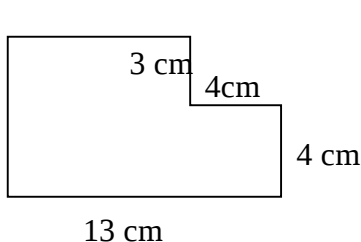


Obr. 5

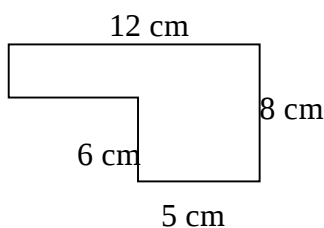


Obr. 6

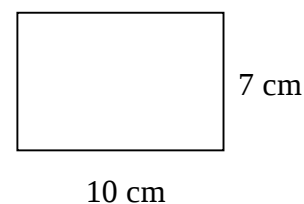
- D) Mravec Športík behá v sklade okolo stien. Podlaha skladu má tvar obdĺžnika so stranami dĺžok 25 m a 32 m. Koľko metrov prebehne pri urobení jedného okruhu popri stenách?
Dnes do skladu postavili stenou ku stene škatuľu. Škatuľa má podstavu tvaru obdĺžnika s rozmermi 3 m a 2 m. Športík ju musí obiehať. Jeho kamaráti Lenítko a Fanúšik sa nevedia dohodnúť, či sa Športíkov okruh predĺžil. Predĺžil sa jeho okruh? Ak áno, o koľko metrov?
(Prevzaté z komentárov MO Z4, 52. ročník)
- E) Definícia skamarátenia sa ako v Z4-I-1. Minule sa skamarátili dva obdĺžniky. Prvý z nich mal rozmery $13 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$, druhý $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Narysuj, ako môže vyzerat' obrazec, ktorý skamarátením spolu vytvorili? Koľko môže potom merať jeho obvod? (Uveď všetky možnosti.)
- F) Definícia skamarátenia sa ako v Z4-I-1. Zisti rozmery dvoch obdĺžnikov, ktoré skamarátením vytvorili obrazce na obrázkoch 7, 8, 9. Nájdi čo najviac možností.



Obr. 7

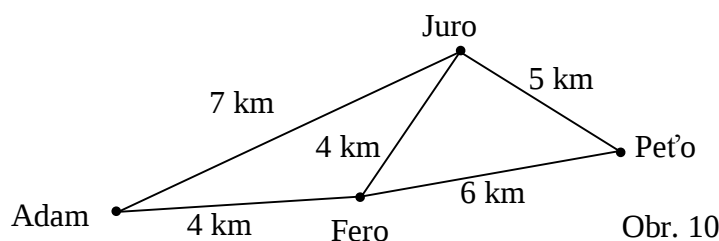


Obr. 8



Obr. 9

- G) Adam ide na bicykli vyzdvihnúť svojich kamarátov Jura, Fera a Peťu. Potom sa pôjdu spolu kúpať. Porad' mu, v akom poradí ich má navštíviť, aby jeho cesta bola čo najkratšia. Pri ktorom poradí by bola najdlhšia?



Obr. 10

Z4-I-2

Zadanie

Z týchto 10 kartičiek



sme vybrali 6 tak, aby sa z nich dali zostaviť dve trojciferné čísla, pre ktoré súčasne platí:

- Ø Jedno z nich sa dá deliť deviatimi bezo zvyšku,
- Ø ich súčet je číslo zapísané len nepárnyymi ciframi.

Nájdi tie dve trojciferné čísla, ktoré spĺňajú obe podmienky a navyše ich súčet je čo najväčší.

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Úloha je definovaná postupne od najmenej závažnej podmienky až po najdôležitejšiu. Od riešiteľa sa teda očakáva, že sa bude vedieť v takomto zadaní orientovať a vyberie si vhodný postup (NÚ A, B). Okrem toho musí vedieť tvoriť rôzne čísla z daných cifier (NÚ C, D). Pre štvrtáka je pojem „byť deliteľný“ ešte neznámy. To znamená, že zistenie, či sa dá niečo deliť deviatimi bezo zvyšku, je ekvivalentné so zistením podielu v obore prirodzených čísel. Nebude teda na škodu zopakovať si násobenie, delenie a delenie so zvyškom (NÚ E, F). NÚ F pritom upozorňuje na to, že každá číslica môže byť použitá iba raz. Úloha má síce viac riešení, ale forma otázky jednoznačne vyžaduje iba jedno riešenie. Ak by sa žiadali viaceré riešenia, musela by otázka pre štvrtáka znieť: „Nájdí všetky dvojice trojciferných čísel, ktoré...“, alebo „Ktoré dvojice trojciferných čísel môžu spĺňať obe podmienky a navyše...“, alebo „Nájdí aspoň dve dvojice trojciferných čísel, ktoré...“.

Stručné riešenie:

Ak chceme získať najväčší možný súčet dvoch trojciferných čísel, musíme vyberať číslice tak, aby na miestach stoviek boli najväčšie možné (9, 8), na miestach desiatok opäť najväčšie ešte nepoužité (7, 6) atď. Najväčší možný súčet potom je $975 + 864 = 1839$. Súčet má byť zapísaný nepárnymi číslicami, čiže to môžu byť čísla: 1799, 1797, 1795, 1793, ...

Skúsme vytvoriť číslo 1799. Vieme, že jedno z hľadaných čísel bude zrejme začínať číslicou 9 a jedno číslicou 8. Deviatky na konci súčtu môžeme získať zo súčtov $0 + 9, 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5$. Prvé dva neprichádzajú do úvahy, lebo deviatku a osmičku už sme použili. Skúsme teda vypísať možnosti a kontrolovať deliteľnosť deviatimi.

dvojica čísel	deliteľné?	poznámka	dvojica čísel	deliteľné?	poznámka
923, 876	nie		952, 847	nie	
924, 875	nie		953, 846	$846 : 9 = 94$	vyhovujú
925, 874	nie		956, 843	nie	
926, 873	$873 : 9 = 97$	vyhovujú	957, 842	nie	
932, 867	nie		962, 837	$837 : 9 = 93$	vyhovujú
934, 865	nie		964, 835	nie	
935, 864	$864 : 9 = 96$	vyhovujú	965, 834	nie	
937, 862	nie		967, 832	nie	
942, 857	nie		973, 826	nie	
943, 856	nie		974, 825	nie	
946, 853	nie		975, 824	nie	
947, 852	nie		976, 823	nie	

Overenie: 926 935 953 962
 873, 864, 846, 837.
 1799 1799 1799 1799

Dvojice čísel, ktoré spĺňajú podmienky zadania sú: 926, 837; 935, 846; 953, 864; 962, 837.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Riešenie s vytvorením len dvojice čísel (hoc aj správnych) a vypísaním ich súčtu je nedostatočné.

V riešení treba vyžadovať vyjadrenie, prečo bude jedno číslo začínať 9 a druhé 8. Aký najväčší súčet sa môže podariť vytvoriť a jednu dvojicu čísel s overením deliteľnosti a súčtu. Samotné hľadanie môže byť popísané aj formou: „Spravil som si kartičky a skúšal som.“ Riešiteľ ho však musí podložiť niekoľkými „zlými“ pokusmi. Pre tento postup stačí, ak vypíše dvojicu vytvorených čísel a ich súčet (ak je súčet nevhodný), respektíve delenie (ak nie je ani jedno deliteľné 9).

Návodné úlohy:

A) Z týchto 10 kartičiek

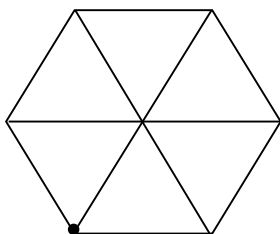


vyber tri tak, aby číslo z nich zložené spĺňalo všetky nasledujúce podmienky:

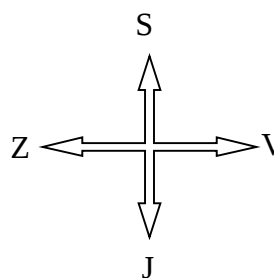
- a) dá sa deliť 8 bez zvyšku,
- b) začína sa číslicou o 3 väčšou, ako končí,
- c) končí číslicou 2.

Vieš nájsť dve riešenia?

B) Princ Patrik má pomocou nasledujúcich inštrukcií a mapy oslobodiť princeznú Angeliku od draka.



Patrik



Obr. 11

- Cesty smerujúce zo západu na východ strážia zbojníci, ktorí zabíjajú pocestných.
- Drak žije na sever od terajšej Patrikovej pozície a tam aj uväznil Angeliku.
- V najzápadnejšom výbežku mapy sídli zlá čarodejnica, ktorá premieňa princov na žaby.

Kadiaľ má ísť Patrik, aby čo najskôr živý a v nezmenenej podobe dorazil k Angeline?

C) Z týchto 10 kartičiek



vytvor

- a) čo najväčšie a čo najmenšie päťciferné číslo,
- b) dve dvojciferné čísla tak, aby ich súčet bol čo najmenší.

D) Z týchto 10 kartičiek



vytvor všetky trojciferné čísla, ktoré obsahujú len párne cifry. Koľko z nich sa dá deliť ôsmimi bez zvyšku?

E) Z čísel 156, 421, 531, 963, 154, 406, 182, 447, 604 vyber tie, ktoré po delení deviatimi dávajú zvyšok 2. Aký zvyšok bol pri delení týchto čísel deviatimi najčastejší?

F) Z týchto 10 kartičiek



Janko postupne tvoril trojciferné čísla, ktoré sa dajú deliť deviatimi bez zvyšku. To znamená, že vybral tri kartičky, zostavil číslo a kartičky pred tvorbou ďalšieho čísla vrátil. Čísla si nepamätá celé, ale tu sú útržky z nich: 32^* , 69^* , 41^* , 8^*7 , 2^*5 . Sylvia tvrdí, že tam mal Janko chyby. Doplň miesto hviezdičiek správne číslice a nájdi tie čísla, ktoré sa nedajú kartičkami doplniť.

Z4-I-3

Zadanie

Zuzka má vo vrecúšku 15 červených, 3 zelené a 8 modrých guľôčok. Na jedno siahnutie do vrecúška vytiahne bez pozerania sa 2 guľôčky a už ich nevráti.

Najmenej koľkokrát musí siahnuť do vrecúška, aby medzi vytiahnutými guľôčkami určite bola aspoň 1 zelená?

Najmenej koľkokrát musí siahnuť do vrecúška, aby aspoň raz vytiahla dvojicu červených guľôčok?

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Úloha problematicky nadväzuje na známe úlohy o ťahaní ponožiek v tmavej miestnosti z batohu. Tieto sa objavujú aj v návodných úlohách (NÚ A, B, C). Je to klasická úloha na Dirichletov princíp. Aby nebolo nutné rozoberať všetky možnosti, uvažujeme iba o najhoršom, resp. krajnom prípade (NÚ D, E). Netradičnosť úlohy je aj v počte farieb aj vo vyberaní dvojice guľôčok naraz.

Stručné riešenie:

Najdlhšie to Zuzka bude trvať, ak bude stále vyťahovať „zlé“ farby guľôčok. V prvej otázke to znamená, že najprv vyberie všetky modré a červené guľôčky. Tých je vo vrecúšku spolu $15 + 8 = 23$. Dvadsaťdva z nich vytiahne na 11 siahnutí do vrecúška. Spolu s tou dvadsiatou tretou vytiahne už aj prvú zelenú. Teda do vrecúška musí siahnuť dvanásťkrát.

Ak chce Zuzka vytiahnuť dvojicu červených guľôčok, musia byť vytiahnuté naraz. Teda zlý prípad je nielen vytiahnutie guľôčok nie červených, ale aj vytiahnutie dvojice zelená – červená alebo modrá – červená. Spolu má $8 + 3 = 11$ inofarebných guľôčok. Ak ku každej inofarebnej pridá červenú, bude to znamenať 11 zlých ťahaní a vo vrecúšku už jej ostanú len $15 - 11 = 4$ červené guľôčky. Pri dvanástom ťahu v tomto prípade musí vytiahnuť dvojicu červených. Zuzka musí opäť siahnuť 12-krát do vrecúška.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Úloha je veľmi ťažká na slovné dôvodenie. Akceptujte preto aj obrázkové riešenia, pri ktorých obrázky zachytávajú najhorší prípad a je urobený záver, že pre obidve otázky stačí dvanásť siahnutí do vrecúška.

Návodné úlohy:

- A) Karolínka má vo vrecúšku 2 biele, 2 červené a 2 zlaté sponky rovnakého tvaru. Bez pozerania sa postupne vybrala 4 sponky. Koľko je možností, čo ostalo vo vrecúšku? Je určite medzi tými štyrmi vybranými aj dvojica rovnakej farby?
- B) Viktor má v batohu 7 rovnakých párov hnedých a 5 rovnakých párov čiernych ponožiek. Poslepiačky vyberá po jednej ponožke z batoha. Už vybral 13 ponožiek. Je medzi nimi určite hnedý pár? A čierny?
- C) Miško si schoval pod skrinku svoje farebné guľôčky. Spolu 4 biele, 5 modrých a 2 červené. Pri ich vyťahovaní si ľahne na brucho a rukou dosahuje na jednotlivé guľôčky bez toho, aby na ne videl. Postupne vytiahol 3 guľôčky. Možno povedať, že niektorá z nich musí byť modrá? Nakresli, ako mohol vyťahovať.

- D) Miško si schoval pod skrinku svoje farebné guľôčky. Spolu 4 biele, 5 modrých a 2 červené. Pri ich vyťahovaní si ľahne na brucho a rukou dosahuje na jednotlivé guľôčky bez toho, aby na ne videl. Koľko guľôčok môže najviac vytiahnuť tak, aby medzi nimi nebola biela? Po koľko vytiahnutiach tam teda biela už určite musí byť?
- E) Miško si schoval pod skrinku svoje farebné guľôčky. Spolu 4 biele, 5 modrých a 2 červené. Pri ich vyťahovaní si ľahne na brucho a rukou dosahuje na jednotlivé guľôčky bez toho, aby na ne videl. Pritom vytiahne vždy tri guľôčky naraz. Práve vytiahol tretiu trojicu guľôčok. Existuje také ťahanie, pri ktorom sa mu ešte nepodarilo vytiahnuť červenú? A modrú?

Z4-I-4

Zadanie

Miško rozstrihal obdĺžnik na obrázku 12 na niekoľko trojuholníčkov. Zo všetkých týchto trojuholníčkov dokáže poskladať veľký trojuholník z obrázka 13. Zo všetkých týchto trojuholníčkov dokáže tiež poskladať rovnobežník z obrázka 14.

Zisti, ako Miško strihal, ak počet trojuholníčkov bol

- a) 4,
b) 3.

(Pre zadania a) aj b) nakresli čiary, po ktorých

mohol Miško strihať. Ďalej nakresli trojuholník z obr. 13 zložený z malých trojuholníčkov aj rovnobežník z obr. 14 poskladaný z malých trojuholníčkov. Pri skladaní sa trojuholníčky nesmú prekrývať, a poskladané útvary nesmú byť deravé.)

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

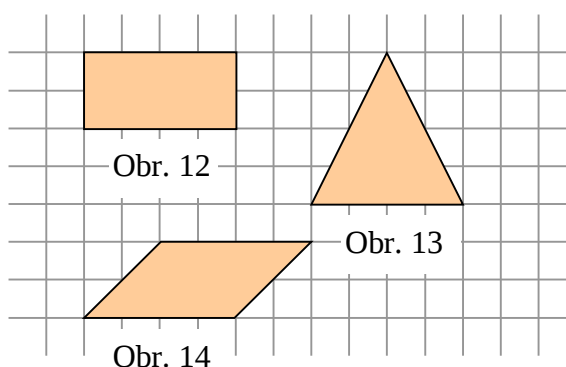
Časť a) úlohy je oproti časti b) ľahšia tým, že dieliky stačí po papieri „posúvať“. Pri časti b) je už nutné jeden dielik otočiť na rubovú stranu. Nosným pojmom úlohy je trojuholník, ktorý by mal mať štvrták jasne prepojený s tvarom, obrázkom (NÚ A). Postupy sa využívajú dva, delenie celku na časti (NÚ A) a tvorenie celku z častí (NÚ B). Pre zlepšenie takýchto schopností je možné dávať deťom rôzne skladačkové hlavolamy (napr. Tangram). V úlohe samotnej je použitá štvorcová sieť pre zjednodušenie zisťovania „šíkmostí“ čiar.

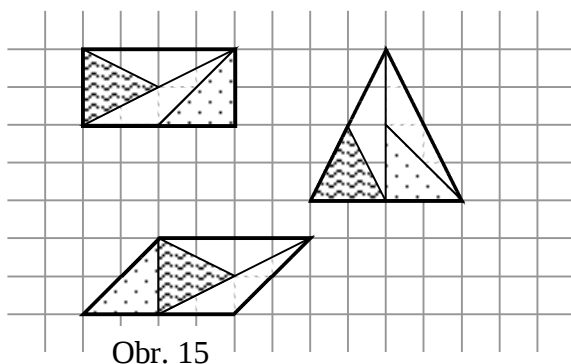
Stručné riešenie:

Na obrázku 15 je jedno možné rozdelenie na 4 časti a skladanie útvarov z nich. Pri strihaní na 4 trojuholníčky sa útvary môžu skladať posúvaním dielov po podložke. Pri strihaní na 3 časti (obr. 16) sa pri skladaní musí aspoň jeden diel preklopiť na rubovú stranu.

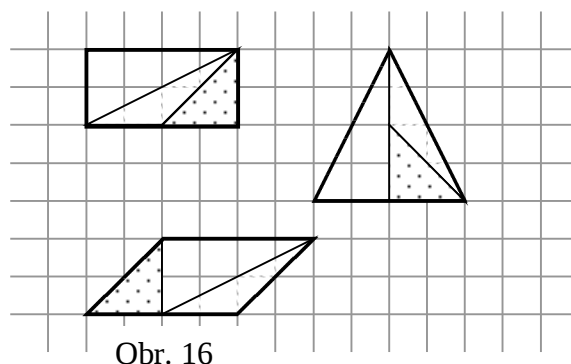
Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Riešenia by mali presne podľa inštrukcií v zadaní obsahovať len obrázky. Dôležité je všimnúť si, či deti nezabudli na podmienku s trojuholníkovými dielmi.





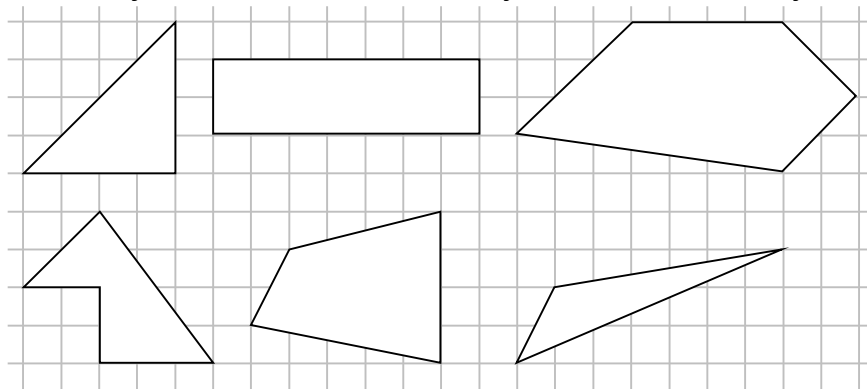
Obr. 15



Obr. 16

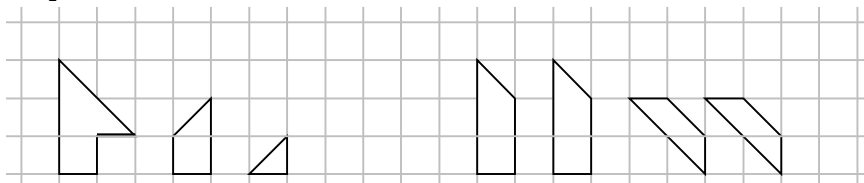
Návodné úlohy:

- A) V štvorcovej sieti na obrázku 17 sú vyznačené rôzne útvary. Ktoré z nich sú



Obr. 17

- trojuholníky? Rozdeľ každý útvar (aj trojuholníky) na tri trojuholníky.
B) Vystrihni si z papiera útvary ako sú na obrázku 18. Z prvých troch poskladaj písmeno T a z posledných štyroch písmeno M. Musel si papierové útvary aj prevracat'?



Obr. 18

Z4-I-5

Zadanie

Kvetka aj Gabika chovajú škrečky. Včera mala Kvetka o 10 škrečkov viac ako Gabika. Cez noc sa aj u Kvetky aj u Gabiky narodilo po 5 škrečkov, takže teraz má Kvetka dvakrát toľko škrečkov ako Gabika. Koľko škrečkov má Kvetka a koľko ich má Gabika?

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Tieto úlohy my dospelí riešime rovnicami. Deti nás však vždy vedia prekvapiť tým, ako ľahko to ide úsudkom (NÚ B, C), či odskúšaním zopár čísel (NÚ D, E). Úloha sa snaží rozvíjať práve tento dôvtip. Návodné úlohy preto môžu len ukázať, čo si možno pri takýchto úlohách všimnúť. Sú však zamerané dvomi smermi, takže je úlohou učiteľa vybrať pre to-ktoré dieťa tú správnu. Len učiteľ totiž môže dostatočne poznať riešiteľa a jeho spôsob uvažovania.

NÚ A sa snaží upozorniť na to, že rozdiel medzi počtami škrekčov sa pripočítaním rovnakého počtu nemení.

Stručné riešenie:

1. úsudkové riešenie

U oboch dievčat sa narodilo rovnako veľa škrekčov. Kvetka má teda ešte stále o 10 škrekčov viac. Súčasne má dvakrát toľko ako Gabika, čiže Gabika musí mať práve 10 škrekčov. Kvetka má dnes 20 škrekčov.

2. riešenie skúšaním

Skúsme dopĺňať čísla do nasledujúcej tabuľky. Najprv si zvolíme napríklad počet škrekčov, ktoré mala Gabika včera. Pomocou údajov zo zadania postupne dopĺňame čísla do ďalších stĺpcov.

Gabika včera	Kvetka včera	Gabika dnes	Kvetka dnes	kontrola
10	20	15	25	$2 \cdot 15 = 30$ to je veľa, skúsime iné číslo
20	30	25	35	$2 \cdot 25 = 50$ ešte viac sa to líši, treba menšie číslo
2	12	7	17	$2 \cdot 7 = 14$ teraz je príliš malé, opatrne ho zväčšíme
4	14	9	19	$2 \cdot 9 = 18$ už to je skoro „ono“, už len kúsok zväčšiť
5	15	10	20	$2 \cdot 10 = 20$ teraz to vyhovuje

Gabika má dnes 10 a Kvetka 20 škrekčov.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Akceptovateľné riešenia sme tentoraz uviedli priamo do časti „stručné riešenie“. Najťažšiu úlohu budú mať deti, ktoré riešenie hneď „uhádnu“. Týmto dajte za úlohu presvedčiť Vás, že to nefunguje s hociakým číslom. Tým urobia prácu podobnú „skúšajúcim“ a budú môcť konštatovať, že pri veľkých číslach má Kvetka menej ako dvojnásobok a pri malých viac ako dvojnásobok počtu Gabikiných škrekčov.

Návodné úlohy:

- Sabina má našetrených o 15 Sk viac, ako jej sestra Nina. Dnes pomáhali mamičke v práci a každá dostala 24 Sk. O koľko korún viac ako Nina má teraz Sabina?
- Martin má v peračníku dvakrát toľko pier ako Janko. Janko má v peračníku o 12 pier menej ako Martin. Ruženka tvrdí, že tých dvanásť je presne počet Jankových pier. Má pravdu? Zdôvodni.
- V pravom vrecku nohavíc mám o 8 cukríkov viac ako v ľavom. Pritom v pravom vrecku mám trikrát toľko cukríkov ako v ľavom vrecku. Koľko cukríkov mám v oboch vreckách spolu?
- Jurko v pondelok nazbieral pri upratovaní v očkovej dielni o 24 klinec viac ako v utorok. Spolu za oba dni nazbieral 86 klinec. Barborka úlohu na zistenie, koľko klinec nazbieral Jurko v utorok, riešila skúšaním. Najprv skúsila 20. Čiže v utorok to bolo 20 klinec a v pondelok $20 + 24 = 44$. Spolu to je $20 + 44 = 64$ klinec. Bol Barborkin odhad príliš malý alebo príliš veľký? Skús jej postupom pokračovať.
- 10 detí z 3.A malo iba bratov. Iba sestry má dvakrát toľko detí ako má bratov aj sestry. Cez letné prázdniny sa jednému triakovi z tejto triedy narodila sestra

a dvom brat. Všetci títo mali pred prázdninami iba bratov. Takže po prázdninách má iba sestry už len o 3 deti viac ako bratov aj sestry. Koľko detí má iba sestry?

Z4-I-6

Zadanie

Škriatok Matík má veľmi rád matematiku. Včera objavil dlhý plot s 2004 latkami a popísal ho opakovane slovom „matematika“ kriedou. Na každú latku počnúc prvou a končiac poslednou napísal jedno písmeno: Najprv M, potom A, T, E, M, A, T, I, K, A, M, A, T, E, atď. Ktoré písmeno bolo na poslednej latke? Koľkokrát napísal písmeno M?

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Táto úloha obsahuje učivo o delení so zvyškom (NÚ A, B). Druhá otázka si vyžaduje ovládanie násobenia (NÚ C). Na nezabudnutie zvyšku slova upozorňujú NÚ C, D. NÚ D pritom poukazuje aj na fenomén násobnosti písmena (korálik).

Stručné riešenie:

Slovo MATEMATIKA má 10 hlások. Ak sa má opakovane napísať po 1 hláske na latku, znamená to, že bude napísaných 200 celých slov ($2004 : 10 = 200$ zv. 4) a ešte 4 písmená – M, A, T, E. Na poslednej latke bude teda písmeno E.

Písmeno M je v slove MATEMATIKA dvakrát. V dvesto slovách bude zopakované $200 \cdot 2 = 400$ -krát. Ešte treba pripočítať jedno M z posledných 4 latiek. Celkom napísal Matík písmeno M 401-krát.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

V tejto úlohe asi nebudú mať žiaci problémy so zapísaním riešenia. Určite bude každé riešenie obsahovať potrebné výpočty a obe odpovede. Pre úplnú korektnosť by mali byť výpočty sprevádzané aspoň minimálnym slovným vysvetlením.

Napr.: „ $2004 : 10 = 200$ zv. 4 ... 200 celých slov“

Návodné úlohy:

- Snehulienka delila svojim 7 trpaslíkom jabĺčka. Ľadné nerozkrojila, trpaslíci dostali rovnako veľa a tie, čo sa nedali rozdeliť, ostali Snehulienke. Koľko jabĺčok dostal Hapčí, ak všetkých bolo 39? Koľko jabĺčok ostalo Snehulienke?
- Kedy by mala Snehulienka viac jabĺčok? Keby delila svojim 7 trpaslíkom 27, alebo 32 jabĺčok?
- Ivko mal ísť do kina. Tak veľmi sa tešil, že popísal všetky latky plotu jednotlivými písmenami K, I, N, O, K, I, ... Na každú latku presne jedno písmeno. Pritom slovo KINO napísal 20-krát a ešte mu na jednu latku vyšlo K. Koľko latiek mal plot, na ktorý Ivko písal? Koľko písmen O napísal? A koľko písmen K?
- Martina robí mamičke k narodeninám náhrdelník. Navlieka na ňu koráliky v tomto poradí: červený, biely, červený, ružový, červený, biely, červený, ružový, červený, ... Na ňu sa jej vošla celá štvorica 13 krát a ešte náhrdelník ukončila červeným, bielym a červeným korálikom. Koľko bielych korálikov použila na tento darček? A koľko červených?

Kategória Z5
riešenia domáceho kola
 Kolektív úlohových komisií MO SR a ČR

Z5-I-1

Viacciferné číslo, ktorého číslice sa v smere zľava doprava zväčšujú (t.j. počet jednotiek je väčší ako počet desiatok, počet desiatok je väčší ako počet stoviek, počet stoviek...), sa volá *rastúce*. Napríklad číslo 2459 je *rastúce*, ale číslo 2354 *rastúce* nie je.

Všetky existujúce rastúce čísla sme správne usporiadali od najväčšieho po najmenšie a prvých 10 sme sčítali. Čo nám vyšlo, ak sme počítali správne?

(Bednářová)

Riešenie:

Najväčšie číslo bude deväťciferné, ďalšie budú osemciferné:

123 456 789

23 456 789

13 456 789

12 456 789

12 356 789

12 346 789

12 345 789

12 345 689

12 345 679

12 345 678

246 913 569

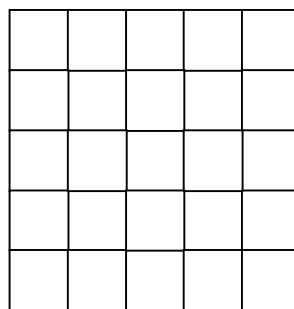
Z5-I-2

Útvár na obrázku č.1 je zložený zo zápaliek.

a) Koľko zápaliek bolo naň použitých ?

b) Koľko zápaliek treba z tohoto obrazca odobrať, aby vzniklo presne 12 štvorcov (strana štvorčeka = 1 zápalka), ktoré sa navzájom môžu dotýkať len vo vrcholoch? Nakresli, ako potom obrazec vyzeral.

(Tlustý)



1 zápalka

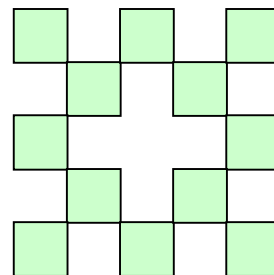
Obr. 1

Riešenie:

a) Na obrazec bolo použitých $5 \cdot 6 = 30$ zvislých

a $5 \cdot 6 = 30$ vodorovných, teda spolu 60 zápaliek.

b) Po odobraní 12 zápaliek dostaneme útvar, ktorý spĺňa podmienky zadania.



Obr. 2

Z5-I-3

Vedci vyšľachtili nový ovocný strom a nazvali ho HRUŠBLOŇ. Na jednom takomto strome rastú súčasne hrušky aj jabĺčka, ale nič iné.

Pritom jablko je vždy dvakrát viac ako hrušiek. O hrušbloni je ešte známe, že sa na nej neurodí ročne menej ako 77 ani viac ako 88 plodov.

- a) Koľko najmenej jabĺk získame ročne z jednej rodiacej hrušblone?
 b) Môžeme mať z 55 hrušbloní úrodu 1600 hrušiek?

(Bednářová)

Riešenie:

Jablká : hrušky = 2 diely : 1 diel, teda spolu máme 3 diely. Celkový počet plodov p musí byť deliteľný 3. Zároveň platí $77 \leq p \leq 88$. Z týchto podmienok vyplýva, že celkový počet plodov môže byť 78, 81, 84, 87.

- a) Najmenej plodov je 78. $78 : 3 = 26$. Hrušiek v tomto prípade je 26 a jabĺk 52. Najmenej môžeme mať z jednej rodiacej hrušblone 52 jabĺk.
 b) Najviac môže byť 87 plodov. Hrušiek na takomto strome bude $87 : 3 = 29$. Z 55 rodiacich hrušbloní môžeme teda získať najviac $55 \cdot 29 = 1595$ hrušiek. Z 55 hrušbloní nemôžeme mať úrodu 1600 hrušiek.

Z5-I-4

Z čísel 3 256 871 a 4 589 238, ktoré spolu obsahujú 14 číslic, vyškrtnite spolu 5 číslic tak, aby súčet vzniknutých čísel bol čo najmenší.

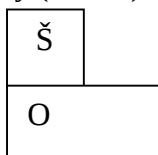
(Bednářová)

Riešenie:

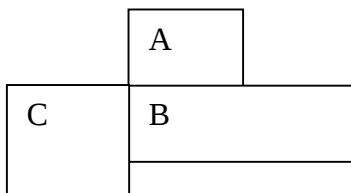
Najmenší súčet získame, ak obidve čísla zmenšíme na nižší rád. Môžeme skúšať škrtnúť v prvom čísle 3 a v druhom 2 číslice a naopak. V prvom prípade získame čísla 2 561 a 45 238. Ich súčet je 47 799. V druhom prípade získame čísla 25 671 a 4 238. Ich súčet je 29 909, čo je číslo zjavne menšie. Vyškrtnúť treba číslice 3 a 8 z prvého a číslice 5, 8 (prvú v poradí), 9 z druhého čísla.

Z5-I-5

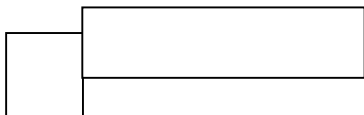
Keď sa dva obdĺžniky skamarátia, pritisnú sa stranami k sebe tak, aby mali aspoň jeden vrchol spoločný (Obr. 3).



Tu sa kamaráti štvorec Š s obdĺžnikom O.



Tu sa kamaráti obdĺžnik A s obdĺžnikom B a obdĺžnik B so štvorcem C, ale nie obdĺžnik A so štvorcem C.



Tieto dva obdĺžniky sa neskamarátili.

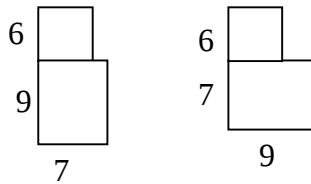
Obr. 3

Štvorec so stranou dĺžky 6 cm sa skamarátil s obdĺžnikom so stranami dĺžok 7 cm a 9 cm. Potom si ešte našli ďalší štvorec, s ktorým sa obaja skamarátili. Aké rozmery mohol mať tento štvorec? Nájdi všetky možnosti. (Štvorec je špeciálny prípad obdĺžnika a platí preň rovnaké pravidlo na skamarátenie sa.)

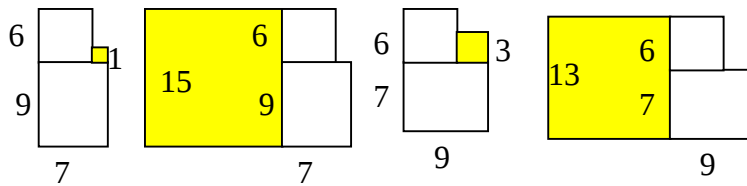
(Dillingerová)

Riešenie:

Štvorec 6×6 a obdĺžnik 7×9 sa mohli skamarátiť nasledujúcimi dvomi spôsobmi (Obr. 4). K nim je nutné pridať všetky možné štvorce spĺňajúce definíciu skamarátenia sa (Obr. 5).



Obr. 4



Obr. 5

Štvorec teda môže mať stranu dĺžky 1 cm, 3 cm, 13 cm alebo 15 cm.

Z5-I-6

Myslím si číslo. Po jeho zaokrúhlení na desaťtisícky dostanem číslo 20 000. Pri zaokrúhľovaní na desiatky sa moje myslené číslo nezmení, pri zaokrúhľovaní na tisícky sa zväčší o 20, pri zaokrúhľovaní na stovky tiež. Aké číslo si môžem myslieť? Napíš všetky možnosti.

(Bednářová)

Ak sa moje číslo po zaokrúhľovaní na tisícky zväčší o 20, musí končiť trojčíslím 980. Ak po zaokrúhlení na desaťtisícky dostanem 20 000, mohlo to byť jedno z nasledujúcich čísel:

15 980; 16 980; 17 980; 18 980;

19 980; 20 980; 21 980; 22 980;

23 980; 24 980.

Ľahko overíme, že všetky tieto čísla spĺňajú aj ostávajúce podmienky zadania.

Kategória Z6
riešenia domáceho kola
 Kolektív úlohovej komisie MO ČR
 Preklad RNDr. M. Dillingerová

Z6-I-1

Cik-cak čísla sú také prirodzené čísla, v ktorých sa striedajú párne a nepárne číslice, pričom žiadne dve z nich nie sú rovnaké. Ktoré *cik-cak* číslo bude 1., 5. a 10. v poradí, ak všetky *cik-cak* čísla napíšeme usporiadané od najväčšieho po najmenšie?

(Bednářová)

Riešenie:

Najväčšie také číslo musí byť desaťciferné. Rozdelíme si cifry na párne a nepárne.

párne sú: 0; 2; 4; 6; 8 nepárne sú: 1; 3; 5; 7; 9.

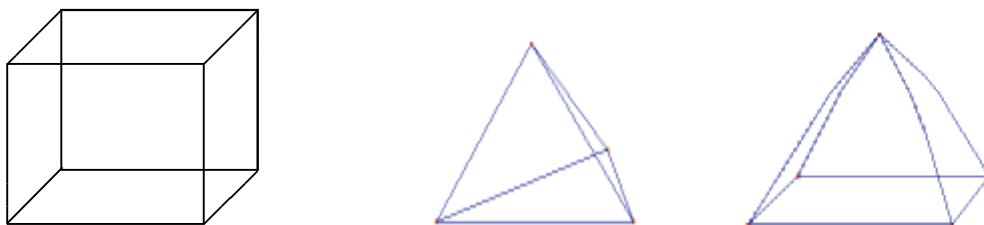
Ak hľadáme najväčšie *cik-cak* číslo, budeme striedavo vyberať z každej skupiny tú najväčšiu cifru a radiť ich za seba. Prvé najväčšie také číslo teda je 9 876 543 210. Pri hľadaní druhého najväčšieho čísla potrebujeme vymeniť poslednú číslicu (t.j. 0) za najbližšiu inú z tej istej skupiny. Vymeníme teda 0 a 2. Dostaneme tak druhé najväčšie *cik-cak* číslo: 9 876 543 012. Pri výmenách číslic musíme dávať pozor aby sme vymieňali len číslice tej istej skupiny, čo zaručuje vznik nového *cik-cak* čísla. Vymieňame odzadu, aby sme čo najmenej zmenšovali hodnotu čísla. Pri tomto postupe dostaneme nasledujúci zoznam čísel:

1. 9 876 543 210
2. 9 876 543 012
3. 9 876 541 230
4. 9 876 541 032
5. 9 876 523 410
6. 9 876 523 014
7. 9 876 521 430
8. 9 876 521 034
9. 9 876 503 412
10. 9 876 503 214

Na 1., 5. a 10. mieste sú vyššie uvedené čísla.

Z6-I-2

Pán učiteľ vyrobil drôtené modely kocky, štvorstena a pravidelného štvorbokého ihlana (obr. č. 1). Všetky hrany týchto telies majú rovnakú dĺžku a ich dĺžka vyjadrená v centimetroch je zapísaná celým číslom. Na zhotovenie kocky spotreboval pán učiteľ viac ako 45 cm drôtu, na ihlan mu stačilo menej ako 35 cm. Koľko centimetrov drôtu (presne) spotreboval na výrobu štvorstena?



Obr. 1

(Bednářová)

Riešenie:

Najprv zistíme, koľko hrán má každé z vyrobených telies:

kocka: 12 hrán

štvorsten: 6 hrán

4-boký ihlan: 8 hrán

Ak na výrobu kocky spotreboval viac ako 45 cm drôtu, musí byť hrana kocky dlhšia ako 3 cm. (lebo $3 \cdot 12 = 36$ a $4 \cdot 12 = 48$)

Ak na ihlan stačilo menej ako 35 cm, musí byť dĺžka jeho hrany menej ako 5 cm. (lebo $5 \cdot 8 = 40$ a $4 \cdot 8 = 32$)

Keďže kocka aj ihlan majú rovnaké dĺžky hrán, tak to musí byť 4 cm. Na štvorsten pán učiteľ spotreboval $4 \cdot 6 = 24$ [cm] drôtu.

Z6-I-3

Miška cestuje k babke vlakom. Zvyčajne odchádza rýchlikom o 9:23 a o 153 minút neskôr vystúpi na stanici, kde čaká na osobný vlak. Dnes rýchlik pri odjazde z Miškinho bydliska meškal 12 minút. Toto meškanie počas jazdy zväčšil dvojnásobne a neskôr zmenšil o 15 minút. Takto ostalo Miške do riadneho odchodu osobného vlaku len 7 minút. Presne o koľkej má mať osobný vlak odchod?

(Dillingerová)

Riešenie:

Ak vlak dvanásťminútové meškanie zdvojnásobil, bolo už 24-minútové. Po zmenšení o 15 minút bolo $24 - 15 = 9$ -minútové. To znamená, že osobný vlak odchádza $9 + 7 = 16$ minút po plánovanom príchode, teda $153 + 16 = 169$ minút po pravidelnom odchode rýchliku z Miškinho bydliska. 169 minút je 3 hodiny bez 11 minút. Po pripočítaní tohto údaju k 9:23 dostaneme 12:12. Pravidelný odchod osobného vlaku je 12:12.

Z6-I-4

Napíš nasledujúcim spôsobom všetky čísla od 1 do 60 za sebou:

1 2 3 ... 58 59 60.

Zo získaného čísla vyškrtaj 100 cifier tak, aby si získal najväčšie možné číslo.

(Volfová)

Riešenie:

Najprv si zistíme, koľko cifier má naše obrie číslo. Vzniklo z 9 jednociferných a $60 - 9 = 51$ dvojciferných čísiel. Takže celkovo má $9 + 51 \cdot 2 = 111$ cifier. 100 z nich máme vyškrtat', takže vznikne 11-ciferné číslo. Ak má byť toto číslo čo najväčšie, musí začínať deviatkami. V pôvodnom čísle je deviatok 6 (v číslach 9, 19, 29, 39, 49, 59). Postupným škrtaním dostaneme číslo 999995051525354555657585960, z ktorého treba ešte 16 cifier vyškrtnúť. Na 6. mieste teraz chceme mať čo najväčšiu číslicu. Nemôže to už byť 9, pretože tým by sme dostali najviac 8-ciferné číslo. Z rovnakého dôvodu to nemôže byť 8. Číslica 7 tam byť môže. Vyškrtame teda 15 cifier medzi 9 a 7 a máme číslo 999997585960, z ktorého musíme ešte jednu cifru vyškrtnúť. Číslo bude najväčšie, keď bude čo najväčšia cifra na 7. mieste. 9 tam byť nemôže, ale môže tam byť 8, ak vyškrtame päťku pred ňou. Najväčšie číslo, ktoré môžeme získať, je teda 99 999 785 960.

Z6-I-5

Rozdeľ obdĺžnik s rozmermi 27 cm a 12 cm

a) na tri obdĺžniky,

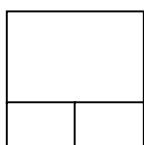
b) na dve časti

tak, aby z nich bolo možné zložiť štvorec (diely sa nesmú prekryvať).

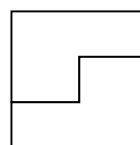
Pomocou obsahu, ktorý ostane nezmenený, si zistíme dĺžku strany štvorca.

$S = 27.12 = 324 \text{ cm}^2$. Odtiaľ strana štvorca má dĺžku 18 cm, lebo $18.18 = 324$.

- a) Z pôvodného obdĺžnika odstrihneme obdĺžnik s rozmermi $12\text{ cm} \times 18\text{ cm}$. Ešte nám ostal pásik s rozmermi $12\text{ cm} \times 9\text{ cm}$. Tento treba rozrezať na polovice (obdĺžniky $6\text{ cm} \times 9\text{ cm}$). Teraz už stačí popísané tri časti správne spojiť (obr. 2).
- b) Aby sme dostali štvorec požadovaných rozmerov, musíme obdĺžniku kratšiu stranu predĺžiť o 6 cm a dlhšiu skrátiť o 9 cm . Výsledkom teda budú akési „schody“, ktoré musíme správne do seba zasunúť (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

Zvolím si nejaké číslo a ťahám figúrkou po štvorčekovom papieri podľa nasledujúceho pravidla: Dané číslo vydelím dvoma. Ak vyjde zvyšok nula, posuniem figúrku o jeden štvorček dohora. Ak vyjde iný zvyšok, ťahám figúrkou o jeden štvorček doprava. Po posunutí figúrky vezmem podiel a opäť ho delím dvoma. Figúrkou posúvam podľa toho istého pravidla a pokračujem takto ďalej.

- Vybral som si číslo 89. Znázorni prvých päť ťahov figúrkou pre toto číslo a napíš posledný podiel.
- Ťahal som figúrkou tak, ako je naznačené na obr. č. 4, a po týchto ťahoch som dostal podiel 1. Aké číslo som si zvolil?

(Raabová)

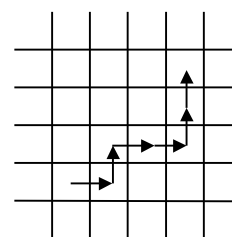
a) 1. ťah: $89 : 2 = 44$ zvyšok 1 posun doprava
 2. ťah: $44 : 2 = 22$ zvyšok 0 posun dohora
 3. ťah: $22 : 2 = 11$ zvyšok 0 posun dohora
 4. ťah: $11 : 2 = 5$ zvyšok 1 posun doprava
 5. ťah: $5 : 2 = 2$ zvyšok 1 posun doprava

Posledný podiel je 2. (Obr. 5)

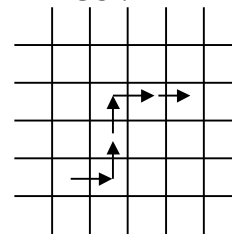
- b) Pri delení prirodzeného čísla dvoma môže byť zvyšok iba 1 alebo 0. Ak viedol ťah doprava, musel byť zvyšok 1. Pri hľadaní počiatočného čísla, budeme postupovať odzadu:

smer ťahu	zvyšok	predchádzajúci podiel
dohora	0	$1 \cdot 2 = 2$
dohora	0	$2 \cdot 2 = 4$
doprava	1	$2 \cdot 4 + 1 = 9$
doprava	1	$2 \cdot 9 + 1 = 19$
dohora	0	$2 \cdot 19 = 38$
doprava	1	$2 \cdot 38 + 1 = 77$

Zvolené číslo bolo 77.



Obr. 4



Obr. 5

Kategória Z7
riešenia domáceho kola
 Kolektív úlohovej komisie MO ČR
 Preklad RNDr. M. Dillingerová

Z7-I-1

Minulý týždeň kúpila Snehulienka dva rovnaké balíčky lentiliiek. Spravidlivo ich rozdelila medzi svojich 7 trpaslíkov tak, že každému sa z nich ušlo 5. Tie lentilky, čo sa už rozdeliť nedali, zjedla sama. Tento týždeň kúpila Snehulienka 3 balíčky tých istých lentiliiek. Znovu ich rozdelila medzi 7 trpaslíkov a zvyšok zjedla. Tentoraz sa jej však ušlo ešte menej ako minulý týždeň. Koľko lentiliiek mohlo byť v jednom balíčku?

(Bednářová)

Riešenie:

Lentiliiek bolo $7 \cdot 5 + \text{zvyšok}$. Pritom zvyšok môže byť niektoré z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Balíčky boli dva, čiže celkový počet lentiliiek musí byť párný. Trpaslíci dostali spolu nepárny počet lentiliiek ($7 \cdot 5 = 35$), takže aj zvyšok musí byť nepárne číslo.

- a) Ak Snehulienke ostala 1 lentilka, tak v dvoch balíčkoch ich bolo spolu $35 + 1 = 36$. V jednom balíčku je potom $36 : 2 = 18$ lentiliiek. Pri druhom delení by sa delilo $3 \cdot 18 = 54$ lentiliiek. Každý trpaslík by dostal 7 a Snehulienka dokonca 5. Pretože $5 > 1$, táto možnosť nevyhovuje.
- b) Ak Snehulienke ostali 3 lentilky, tak v dvoch balíčkoch ich bolo spolu $35 + 3 = 38$. V jednom balíčku je potom $38 : 2 = 19$ lentiliiek. Pri druhom delení by sa delilo $3 \cdot 19 = 57$ lentiliiek. Každý trpaslík by dostal 8 a Snehulienka iba 1. Pretože $1 < 3$, táto možnosť vyhovuje.
- c) Ak Snehulienke ostalo 5 lentiliiek, tak v dvoch balíčkoch ich bolo spolu $35 + 5 = 40$. V jednom balíčku je potom $40 : 2 = 20$ lentiliiek. Pri druhom delení by sa delilo $3 \cdot 20 = 60$ lentiliiek. Každý trpaslík by dostal 8 a Snehulienka 4. Pretože $4 < 5$, táto možnosť vyhovuje.

Úloha má dve riešenia: v jednom balíčku mohlo byť 19 alebo 20 lentiliiek.

Z7-I-2

Mamička usmažila šišky. Ich vôňa prilákala deti. Paľko si vzal o jednu šišku menej, než bola tretina všetkých šišiek, Svetlana o jednu šišku menej, než bola tretina ostávajúcich a Maruška o jednu šišku menej, než bola tretina zvyšku. V mise ostalo 11 šišiek. Koľko šišiek usmažila mamička?

(Hozová)

Riešenie:

1. SPÔSOB

Výhodné je uvažovať odzadu.

a) Uvažujme, koľko mohlo byť v mise šišiek, keď k nim prišla Maruška. Určite to bolo číslo väčšie ako jedenásť a zároveň deliteľné 3. Teda do úvahy prichádzajú čísla 12, 15, 18,...

Ak ich bolo 12:

$$12 : 3 = 4; \quad 4 - 1 = 3; \quad 12 - 3 = 9, \text{ čo nevyhovuje}$$

Ak ich bolo 15:

$$15 : 3 = 5; \quad 5 - 1 = 4; \quad 15 - 4 = 11, \text{ čo vyhovuje. Takže Svetlana nechala na miske 15 šišiek.}$$

b) Uvažujme, koľko mohlo byť v mise šišiek, keď k nim prišla Svetlana. Určite to bolo číslo väčšie ako 15 a zároveň deliteľné 3. Teda do úvahy prichádzajú čísla 18, 21, 24,...

Ak ich bolo 18:

$$18 : 3 = 6; \quad 6 - 1 = 5; \quad 18 - 5 = 13, \text{ čo nevyhovuje}$$

Ak ich bolo 21:

$$21 : 3 = 7; \quad 7 - 1 = 6; \quad 21 - 6 = 15, \text{ čo vyhovuje. Takže Pal'ko nechal na miske 21 šišiek.}$$

c) Uvažujme, koľko mohlo byť v mise šišiek, keď k nim prišiel Pal'ko. Určite to bolo číslo väčšie ako 21 a zároveň deliteľné 3. Teda do úvahy prichádzajú čísla 24, 27, 30,...

Ak ich bolo 24:

$$24 : 3 = 8; \quad 8 - 1 = 7; \quad 24 - 7 = 17, \text{ čo nevyhovuje.}$$

Ak ich bolo 27:

$$27 : 3 = 9; \quad 9 - 1 = 8; \quad 27 - 8 = 19, \text{ čo nevyhovuje.}$$

Ak ich bolo 30:

$$30 : 3 = 10; \quad 10 - 1 = 9; \quad 30 - 9 = 21, \text{ čo vyhovuje. Takže mamička usmažila 30 šišiek.}$$

2. SPÔSOB

Keby si Maruška vzala presne tretinu, ostalo by ich na miske iba 10, čo sú dve tretiny celkového počtu. Preto si Maruška brala z $(10 : 2) \cdot 3 = 15$ šišiek. Keby si Svetlana vzala presne tretinu, ostalo by ich na miske iba 14, čo sú dve tretiny celkového počtu. Preto si Svetlana brala zo $(14 : 2) \cdot 3 = 21$ šišiek. Keby si Pal'ko vzal presne tretinu, ostalo by ich na miske iba 20, čo sú dve tretiny celkového počtu. Preto si Pal'ko bral z $(20 : 2) \cdot 3 = 30$ šišiek. Mamička usmažila 30 šišiek.

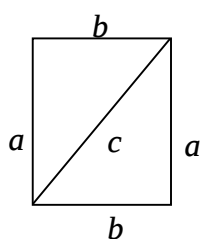
Z7-I-3

Mám dva rovnaké papierové trojuholníky. Viem z nich (bez prekryvania) zložiť obdĺžnik s obvodom 21 cm, alebo kosodĺžnik s obvodom 24 cm, alebo aj trojuholník s obvodom 27 cm. Aké rozmery majú moje trojuholníky?

(Bednářová)

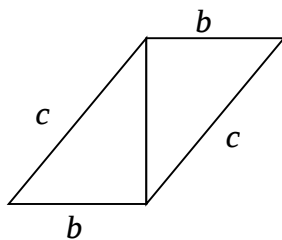
Riešenie:

Aby sa dal zložiť obdĺžnik (obr. 1A), musia byť trojuholníky pravouhlé (s odvesnami dĺžok a , b , kde $a \geq b$, a preponou dĺžky c). Kosodĺžnik získame priložením trojuholníkov k sebe rovnakými odvesnami. Toto sa môže uskutočniť dvoma spôsobmi (obr. 1B, C). Trojuholník tiež dostaneme priložením rovnakých odvesien trojuholníkov a opäť to môžeme urobiť dvoma spôsobmi (obr. 1D, E).



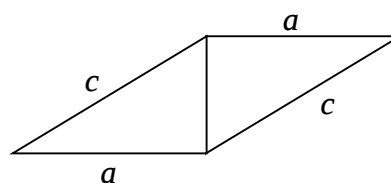
$$o_1 = 2a + 2b = 21$$

Obr. 1A



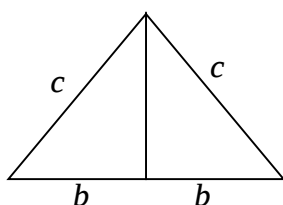
$$o_2 = 2b + 2c = 24$$

Obr. 1B



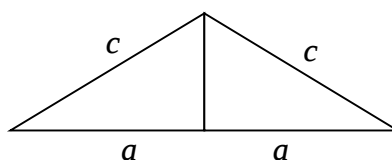
$$o_3 = 2a + 2c = 24$$

Obr. 1C



$$o_4 = 2b + 2c = 27$$

Obr. 1D



$$o_5 = 2a + 2c = 27$$

Obr. 1E

Ako vidieť, zrejme nastali prípady z obrázkov 1A, 1B a 1E. Teraz stačí opísať rovnice obvodov a riešiť sústavu. (Nakoľko žiaci ešte nevedia riešiť sústavy rovníc, budú postupovať skusmo.)

$$2a + 2b = 21$$

$$2b + 2c = 24$$

$$2a + 2c = 27$$

$$4a + 4b + 4c = 72$$

$$2a + 2b + 2c = 36$$

$$2c = 36 - 21$$

$$2a = 36 - 24$$

$$2b = 36 - 27$$

$$c = 7,5$$

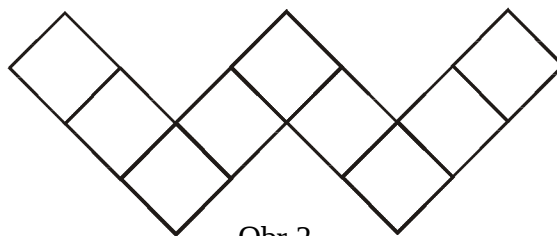
$$a = 6$$

$$b = 4,5$$

Pôvodné trojuholníky mali rozmery 4,5 cm, 6 cm a 7,5 cm.

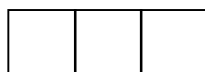
Z7-I-4

Do obrazca vpíšte čísla 1, 2, ..., 9 tak, aby súčty v každom „trojokienku“ boli rovnaké a čo možno najväčšie.



Obr.2

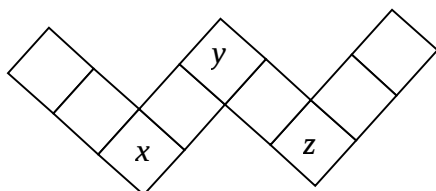
(Tlustý)



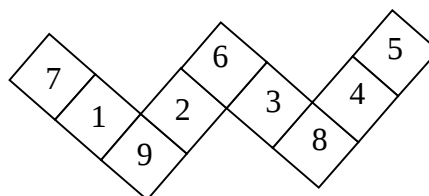
„trojokienko“

Riešenie:

Do obrazca sa dajú umiestniť štyri „trojokienka“, ktoré sa navzájom prekrývajú v rohoch. Označme tieto miesta x, y, z (Obr. 3). Súčet čísel od 1 po 9 je 45 a súčet čísel v každom trojokienku označíme s . Potom $45 = s - x + s - y + s - z + s = 4s - (x + y + z)$. Veľkosť súčtu s je teda závislá len na veľkosti súčtu $x + y + z$. Súčet $x + y + z$ je maximálny, ak použijeme najväčšie možné čísla, t.j. 7, 8, 9. Potom $45 = 4s - (7 + 8 + 9)$, odkiaľ $4s = 69 \Rightarrow s = 17,25$, čo nemôže byť. Preto skúsime zmenšiť súčet $x + y + z$ o 1, čiže za x, y, z zvolíme čísla 6, 8, 9. Potom $45 = 4s - (6 + 8 + 9)$, odkiaľ $4s = 68 \Rightarrow s = 17$. Najväčší možný súčet čísel v trojokienku je 17. Pretože $9 + 8 = 17$, nemôžu byť čísla 8 a 9 v tom istom trojokienku. Na mieste y teda musí byť 6 a na miestach x a z bude 8 a 9. Zvyšné čísla už potom ľahko doplníme. Jedna z možností je na obr. 4.



Obr. 3



Obr. 4

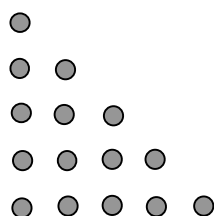
Z7-I-5

Neznámy vandal vytrhol z knihy jeden list. Súčet všetkých čísel stránok po vytrhnutí listu je 11011. Koľko mala kniha pôvodne listov a aké boli čísla stránok vytrhnutého listu? (Stránky sú číslované všetky a číslovanie začína číslicou 1.)

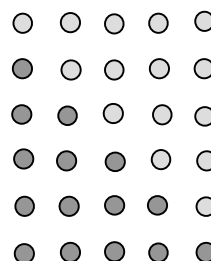
(Hozová)

Riešenie:

Ak chceme sčítať postupnosť prirodzených čísel, môžeme tak urobiť postupným spočítavaním alebo vytvorením zhodných skupín a vynásobením súčtu čísel v skupine počtom skupín. Pre siedmaka prístupnejší by mohol byť nasledujúci prístup, ktorý si vysvetlíme na sčítaní čísel 1, 2, 3, 4 a 5.



Obr. 5A



Obr. 5B

Súčet je $1+2+3+4+5=15$ (Obr. 5A). Ak bodky reprezentujúce čísla 1 – 5 „zdvojnásobíme, dostaneme miesto pôvodného trojuholníka obdĺžnik s $5 \cdot (5+1)$ bodkami (Obr. 5B). Pôvodný

počet bodov bol ale polovičný, teda $\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

Ak teda máme sčítať x prvých prirodzených čísel, ich súčet bude $s = \frac{x(x+1)}{2}$.

Nech x označuje počet stránok knihy.

Súčet všetkých čísel stránok by potom mal byť $s = \frac{x(x+1)}{2}$.

Nakoľko vandal nejaký list vytrhol, musí platiť $\frac{x(x+1)}{2} > 11011 \Rightarrow x(x+1) > 22022$.

Pre ohraňenie čísla x môžeme urobiť nasledujúci odhad:

$$x(x+1) > 22022 \Rightarrow (x+1)(x+1) > 22022 \Rightarrow x+1 > \sqrt{22022} \doteq 148,398.$$

Najmenšie možné x potom je 148. Keby bolo v knihe 148 strán, musel by byť súčet čísel stránok $s = \frac{148 \cdot 149}{2} = 11026$, čo je o 15 viac, ako sme spočítali. Preto vytrhnutý list musel

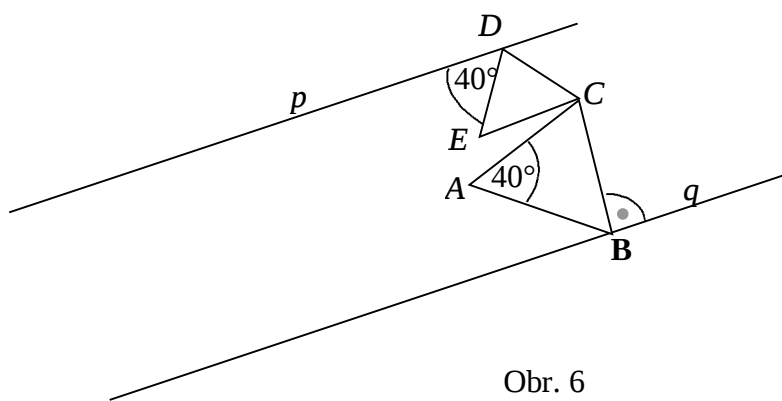
mať čísla 7 a 8. Pôvodný počet listov bol $148 : 2 = 74$.

Pre kontrolu je potrebné ukázať, že väčší počet strán ako 148 nevyhovuje. Keby mala kniha aspoň o jeden list viac, mala by aspoň 150 strán a po vytrhnutí jedného listu by bol súčet čísel zostávajúcich strán najmenej $1 + 2 + 3 + \dots + 148 > 11011$.

Kniha mala 74 listov a vandal vytrhol list so stránkami číslo 7 a 8.

Z7-I-6

Na obrázku č. 6 sú načrtnuté rovnobežné priamky p, q a trojuholníky ABC a CDE , ktoré ležia medzi nimi. Platí:



Obr. 6

- § $D \in p$ a $B \in q$,
- § $\triangle ABC$ je rovnoramenný,
- § $\triangle CDE$ je rovnostranný.

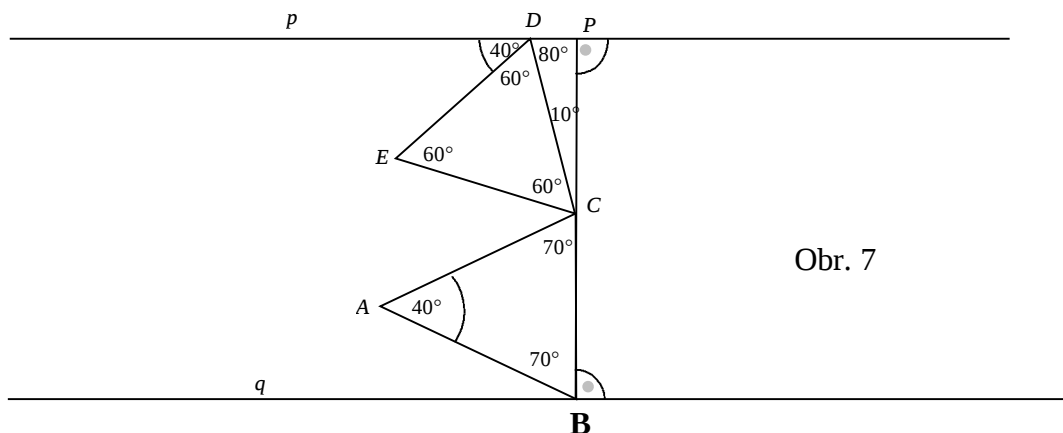
Vypočítaj veľkosť uhla ECA .

(Dillingerová)

Riešenie:

Doplňme veľkosti uhlov v jednotlivých trojuholníkoch. Trojuholník DEC je rovnostranný, preto veľkosti všetkých jeho vnútorných uhlov sú 60° . V trojuholníku ABC doplnenie veľkostí závisí od toho, ktoré strany sú ramenami. Dostávame preto nasledujúce prípady:

- a) Nech bod A je hlavným vrcholom trojuholníka ABC . Potom $|\angle ABC| = |\angle ACB| = 70^\circ$.

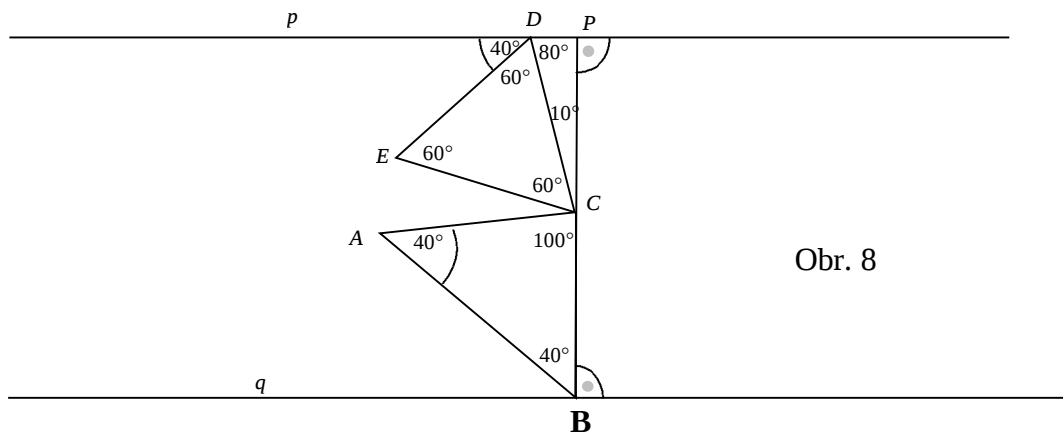


Obr. 7

Nech P je pätá kolmice BC na priamku p . Potom $|\angle PDC| = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$

a $|\angle PCD| = 180^\circ - (80^\circ + 90^\circ) = 10^\circ$. Z obrázka 7 je zřejmé, že
 $|\angle ECA| = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ + 10^\circ) = 40^\circ$

b) Nech bod C je hlavným vrcholom trojuholníka ABC . Potom $|\angle ACB| = 100^\circ$. Nech



opäť P je päta kolmice BC na priamku p . Potom $|\angle PDC| = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$

a $|\angle PCD| = 180^\circ - (80^\circ + 90^\circ) = 10^\circ$. Z obrázka 8 je zřejmé, že

$|\angle ECA| = 180^\circ - (100^\circ + 60^\circ + 10^\circ) = 10^\circ$

c) Nech bod B je hlavným vrcholom trojuholníka ABC . Potom $|\angle ABC| = 100^\circ$. V tomto prípade by vrchol A trojuholníka ABC , a teda ani trojuholník ABC , neležal medzi priamkami p, q .

Úloha má dve riešenia. Uhol ECA môže mať veľkosť 10° alebo 40° .

Komentáre MOZ 8

RNDr. Monika Dillingerová

Z8-I-1

Zadanie

Ocko oprel náš nový rebrík o stenu domu. Spodná (prvá) priečka je 24 cm nad zemou. Posledná – štrnástá priečka je päťkrát tak vysoko, ako tretia priečka. Vzdialenosť medzi každými dvoma priečkami je rovnaká.

a) Ako vysoko nad zemou je tretia priečka?

b) O koľko vyššie sa dostane ocko, ak z tretej priečky vystúpi na piatu?

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Ide o klasickú slovnú úlohu, v ktorej treba situáciu modelovať zložitou rovnicou, prípadne sústavou rovníc. NÚ A, B sa preto zameriavajú na riešenie rovníc. V NÚ A si žiaci zopakujú ekvivalentné úpravy a v NÚ B riešia jednoduché rovnice. Úloh tohto typu je možné podľa individuálnej potreby žiaka zaraďovať viac alebo menej. Ťažiskom slovnej úlohy je však všeobecné zaznačenie vzťahov, preto NÚ C, D sa venujú modelovaniu situácie pomocou vzťahov a rovníc. V NÚ D ide o postupné zadávanie viac a viac údajov. Jej členenie pomáha oddeleniu postupne spracovávaných informácií. Toto sa využíva aj v úlohe MO, kde je potrebné najprv si zaviesť neznámu, potom vytvoriť vzťahy pre výšku jednotlivých priečok a nakoniec uvedené spojiť pomocou rovnice so zohľadnením vzťahu medzi uvedenými výškami. Tento druh práce s textom najviac pripomínajú NÚ D c) a E. Na posledné úskalie, ktoré by mohlo ovplyvniť žiakovu úspešnosť, je upozornené v NÚ F.

Stručné riešenie:

Označme a zmenu výšky pri vystúpení o jednu priečku vyššie. Potom tretia priečka je vo výške $2a + 24$ [cm]. Štrnástá priečka je vo výške $13a + 24$ [cm]. Využitím vzťahu zo zadania, dostaneme: $5 \cdot (2a + 24) = 13a + 24$.

Jeho úpravou dospejeme k $a = 32$ [cm]. Teraz je už ľahké dopočítať požadované údaje.

a) Tretia priečka je vo výške $2a + 24 = 88$ [cm].

b) Ak ocko vystúpi z tretej na piatu priečku, dostane sa o $2a = 64$ [cm] vyššie.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Úlohu je možné riešiť iba rovnicou, alebo kreslením, zisťovaním vzťahov v obrázku a jednoduchšou rovnicou. Oba prístupy považujeme za rovnocenné. Ak riešiteľ stotožní vzájomnú vzdialenosť dvojice priečok so zmenou výšky pri postúpení o jednu priečku, navrhneme hodnotiť známku dobre (2).

Návodné úlohy:

A) Riešte rovnice: a) $x + 2 = 7$

b) $x - 48 = 64$

c) $35 - x = 16$

d) $15x = 105$

B) Riešte rovnice: a) $6x + 10 = 2 \cdot (x + 7)$

b) $2 \cdot (3x + 5) = 2 \cdot (x + 15)$

c) $6x + 8 = 2x - 12$

C) Víla Prvosienka je veľká tanečnica. Za jednu mesačnú noc pretancuje len o jedny črievičky menej ako víla Nezábudka za dve takéto noci. Koľko párov črievičiek pretancuje Prvosienka za jednu mesačnú noc, ak Nezábudka za takú istú noc

- pretancuje 4, 2, 5, 3 páry črievičiek? Vytvor vzorec na výpočet Prvosienkou pretancovaných párov črievičiek.
- D) Na ostrove Dragoland žijú modrí, červení a zelení draci.
- a) Jeden červený drak vychrlí denne o 5 litrov ohňa viac ako dvaja modrí draci. Zapiš tento údaj rovnicou, ak neznámou má byť počet litrov ohňa vychrleného jedným modrým drakom za deň a červený drak vychrlí denne 45 l ohňa. Vypočítaj, koľko litrov ohňa vychrlí denne jeden modrý drak.
- b) Traja zelení draci vychrlia denne o 5 litrov ohňa viac ako piati modrí draci. Zapiš aj tento údaj rovnicou, ak neznámou má byť počet litrov ohňa vychrleného jedným zeleným drakom. Pre množstvo ohňa vychrleného za deň modrým drakom použi výsledok úlohy a). Vypočítaj, koľko litrov ohňa vychrlí denne jeden zelený drak.
- c) Oheň drakov rôznych farieb má rôznu silu. Dvaja zelení draci svojim ohňom denne spália toľko cm^2 trávy ako modrý a červený drak spolu. Jeden modrý drak spáli jedným litrom ohňa o 7 cm^2 viac trávy ako červený drak dvomi litrami svojho ohňa. Jeden červený drak spáli piatimi litrami ohňa o 14 cm^2 trávy viac ako modrý drak dvoma litrami ohňa. Ktorý drak spáli denne najviac trávy?
- E) Jeden môj krok meria 70 cm. Ak urobím 1 krok a 10 skokov, som štyrikrát tak ďaleko ako keď urobím 1 krok a 2 skoky. (Všetky moje skoky sú rovnako dlhé.) Koľko cm meria jeden môj skok?
- F) Popri letnom kúpalisku je vysadená aleja stromov. Stromy sú vysadené v rade za sebou so vzájomnými odstupmi 7 m. Ako ďaleko je prvý strom od posledného, ak v aleji sú 2, 3, 5, 14, 47 stromov?

Z8-I-2

Zadanie:

Myslím si 4 dvojčiferné čísla. Dve sú prvočísla a dve sú zložené čísla. Súčet prvočísel je 100 a súčet zložených čísel je tiež 100. Aj prvočísla aj zložené čísla sú tvorené tou istou štvoricou rôznych cifier. Aké čísla som si myslela?

(Ptáčková)

Poznámky k úlohe:

Úloha vyžaduje od riešiteľa dobré znalosti pojmov prvočíslo a zložené číslo. Týmito pojmi sa zaoberá NÚ A. Tiež je nutné vedieť vyhľadať dvojčiferné prvočísla (NÚ B). Jedna forma riešenia môže využívať rozvoj čísla v desiatkovej sústave a vlastnosti cifier tohto čísla (NÚ C, D). Podmienka na všetky riešenia v NÚ D pritom vyžaduje cielené prehľadávanie, ktoré možno vhodne zúročiť aj v úlohe MO.

Stručné riešenie:

Vieme, že súčet prvočísel má byť 100 a každá cifra týchto čísel je iná: $\overline{ab} + \overline{cd} = 100$. Potom zrejme: $b + d = 10 \wedge a + c = 9$. Vypíšme možnosti pre cifry a , c a k nim vhodné b , d .

a, c	b, d		
1, 8	3, 7	4, 6	
2, 7	1, 9	4, 6	
3, 6	1, 9	2, 8	
4, 5	1, 9	2, 8	3, 7

Kvôli podmienke o prvočísloch nemôže byť číslo b ani číslo d párne.

Aby po zámene cifier ešte stále bol súčet 100, môžeme cifry zamieňať jediným spôsobom, vymeníme cifry na mieste jednotiek. Takto by sme mali získať dvojicu zložených čísel.

Skúsime teda všetky kombinácie cifier pre prvočísla a hneď aj skontrolujeme, či zámenou dostaneme zložené čísla.

$\overline{ab}$	$\overline{cd}$	sú prvočísla?	$\overline{ad}$	$\overline{bc}$	sú zložené?
-----------------	-----------------	---------------	-----------------	-----------------	-------------

13	87	nie, $3 87$	17	83	nie, obe sú prvočísla
17	83	áno	13	87	nie, 13 je prvočíslo
21	79	nie, $3 21$	29	71	nie, obe sú prvočísla
29	71	áno	21	79	nie, 79 je prvočíslo
31	69	nie, $3 69$	39	61	nie, 61 je prvočíslo
39	61	nie, $3 39$	31	69	nie, 31 je prvočíslo
41	59	áno	49	51	áno, $49 = 7 \cdot 7$, $51 = 3 \cdot 17$
49	51	nie	41	59	nie, obe sú prvočísla
43	57	nie, $3 57$	47	53	nie, obe sú prvočísla
47	53	áno	43	57	nie, 43 je prvočíslo

Myslené čísla sú 41, 59, 49, 51.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Predpokladáme, že žiaci si najprv vypíšu všetky dvojčiferné prvočísla. Potom vyberú tie dvojice, ktoré majú súčet 100. Nakoniec zámenou čífiel a zistením, či ide o zložené čísla so súčtom 100, budú kontrolovať vhodnosť vybraných prvočísel. Pri tomto postupe treba dbať na to, aby boli vypísané všetky dvojčiferné prvočísla, zdôvodnené, ako zamieňať cifry, a ukázané, že po zámene ide naozaj o zložené čísla (rozkladom na súčin).

Návodné úlohy:

- A)
 - a) Zisti, ktoré z nasledujúcich čísel sú prvočísla: 45, 37, 111, 91, 712, 911.
 - b) Koľko rôznych deliteľov má prvočíslo?
 - c) Môže mať zložené číslo iba dvoch rôznych deliteľov? A troch?
 - d) Vypíš všetky čísllice, ktorými môže končiť prvočíslo.
- B) Čísla 3, 5 a 5, 7 nazývame prvočíselné dvojčičky. Druhé z nich je vždy o 2 väčšie ako prvé. Koľko je prvočíselných dvojčičiek medzi dvojčifernými prvočíslami? Kde ich je viac, medzi číslami od 10 do 55, alebo medzi číslami od 56 do 99?
- C) Nájdi také najmenšie prvočíslo xyz s ciframi x, y, z , o ktorom vieme, že $x < y < z$.
- D) Nájdi takú dvojicu dvojčiferných prvočísel, aby ich súčet bol čo najmenším (najväčším) násobkom čísla 5. Uveď všetky riešenia.

Z8-I-3

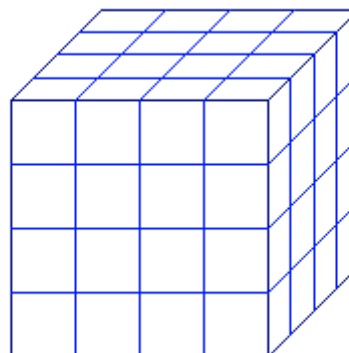
Zadanie:

V Jurkovej stavebnici je 64 rovnako veľkých kociek. Steny týchto kociek sú jednofarebné – biele alebo čierne. Zo všetkých kociek sa dá zložiť jedna veľká kocka, ktorej každá stena je z polovice biela a z polovice čierna. Koľko najviac celkom bielych kociek môže byť v Jurkovej stavebnici? Načrtnite obrázok, ako by táto veľká kocka vyzerala pri pohľade zdola, zozadu, spredu, zhora, zľava a sprava.

(Bednářová)

Poznámky k úlohe:

Úloha v sebe skrýva prvky zo stereometrie, matematickej analýzy a kombinatorickej geometrie. Spojením všetkých týchto častí vznikol komplexný problém. Jeho uchopovanie bude zrejme musieť prebiehať v etapách, ktoré postupne

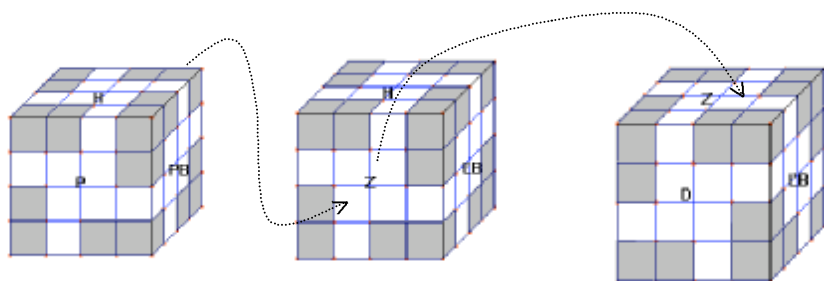


Obr. č. 1

prechádzajú spomenutými oblasťami matematiky. Stereometrii je venovaná NÚ A. Ide o zrejme najjednoduchšiu časť úlohy, ktorej sa žiaci zhostia bez problémov. Úlohy na minimum a maximum spolu veľmi úzko súvisia. NÚ B by mala upozorniť, že tieto úlohy sú pri dvojici objektov zameniteľné (t.j. ak prvý objekt dosiahol pri danom súčte všetkých objektov minimum, tak druhý dosiahol maximum a naopak). Precvičenie tohto princípu nájdeme v NÚ C. Poslednou témou je ofarbenie, v tomto prípade spadajúce do kombinatorickej geometrie. Pritom bude hrať dôležitú úlohu pochopenie slovného spojenia: „z polovice biela a z polovice čierna“. Preto sme zaradili do tejto časti NÚ D a E.

Stručné riešenie:

Veľká kocka má rozmery $4 \times 4 \times 4$ (Obr. 1). Teda každá jej stena je tvorená 16 štvorcami stien malých kociek. Ak má byť stena z polovice biela a z polovice čierna, musí byť 8 týchto štvorcov v každej stene čiernych. Aby sme pritom vytvorili čo najmenej nie celkom bielych malých kociek, musíme sa snažiť využívať kocky na hranách a v rohoch veľkej kocky, Rohov



Obr. 2a

Obr. 2b

Obr. 2c

Steny sú označené podľa obr. 2a.

Z = zadná stena

P = predná stena

H = horná stena

PB = pravá bočná stena

LB = ľavá bočná stena

D = dolná stena

je 8, ak ich

začiernime

, použili

sme už 8

nie celkom

bielych

kociek

a v každej

stene sú už

4 štvorce

čierne.

Ostáva

také možné

je sieť

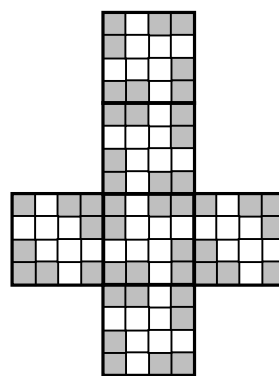
44 kociek

určiť, ako vybrať kocky na hranách (mimo rohov). Jedno ofarbenie je na obrázkoch číslo 2 a, b, c a na obrázku č. 3 takejto kocky.

Nafarbených je spolu 20 kociek. Takže najviac môže byť celkom bielych.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a

Je nutné, aby žiaci vypísali, ako uvažovali. Iba nakreslená kocka a vypísaný výsledok nie sú postačujúce. Je aby žiak vypísal aké boli preferencie ofarbovania, ktoré kocky určite budú na niekoľkých stenách začiernené. z rôznych strán na kocku pritom pre riešenie považujeme rovnocenné obrázku siete kocky.



Obr. 3

požadovať:

ofarbená

potrebné,

malé

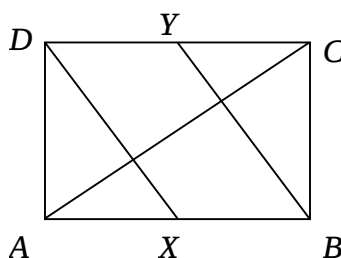
Pohľady

za

Návodné úlohy:

- Gabika postavila z malých rovnako veľkých kociek veľkú kocku. Každá stena veľkej kocky je tvorená 9 štvorcami stien malých kociek. Koľko malých kociek použila Gabika na stavbu veľkej kocky? Potom zo svojej veľkej kocky postavila tri rovnaké menšie kocky. Štvrtá taká istá sa už postaviť nedala, lebo malých kociek bolo málo. Koľko malých kociek jej pri tomto stavaní ostalo?
- Silvia má vo vrecku červené a zelené guľky. Spolu ich je 27. Červených nie je menej ako tretina všetkých guľiek.

- a) Koľko najviac môže byť zelených?
 b) Koľko najmenej môže byť červených?
- C) Fedor má na policike nad posteľou modely autíčok. Spolu ich je 137. Pritom sú uložené tak, že každé dve susedné nákladné autá sú od seba oddelené buď tromi alebo dvoma inými autíčkami. Iných ako nákladných nikde nie je viac ako 3 vedľa seba.
 a) Koľko najmenej nákladných áut môže mať Fedor na policike? Koľko potom bude iných?
 b) Koľko najmenej môže byť iných ako nákladných áut?
- D) Narysuj štvorec so stranou dĺžky $a = 8$ cm. Rozdeľ tento štvorec na malé štvorčeky so stranou dĺžky 1 cm. Zafarbi toľko malých štvorčekov na čierno, aby bol veľký štvorec z polovice biely a z polovice čierny. Koľko štvorčekov je čiernych? Skús to urobiť rôznymi spôsobmi. Dá sa to aj tak, aby štvorčeky ležiace pri obvode veľkého štvorca boli všetky biele?
- E) Obdĺžnik $ABCD$ z obrázka č. 4 s rozmermi 6 cm a 4 cm je rozdelený na 6 častí. Vyfarbi niektoré z častí červenou farbou tak, aby bol z polovice červený a z polovice biely. Pokús sa to urobiť tak, aby čo najmenšia časť obdĺžnika $ABCD$ bola červená. (Bod stredom strany AB , resp. CD)



Obr. 4

Z8-I-4Zadanie:

Sedem trpaslíkov našlo košík jablák. Bez toho, aby jabĺčka krájali, podelili sa medzi sebou. Prvý dostal jedno jablko a $\frac{1}{9}$ zvyšku. Potom prišiel druhý, vzal si dve jablká a $\frac{1}{9}$ zvyšku, tretí tri jablká a $\frac{1}{9}$ zvyšku a tak ďalej, až siedmy si vzal 7 jablák a $\frac{1}{9}$ zvyšku. Jablká, ktoré po tomto delení zostali v košíku, priniesli Snehulienke. Koľko najmenej jablák našli trpaslíci? Koľko jablák dostal každý z nich a koľko Snehulienka?

(Hozová)

Poznámky k úlohe:

V mnohých životných situáciách sa stretávame s tým, že musíme niečo spätne rekonštruovať. Aj tu je spätná rekonštrukcia základnou myšlienkou úlohy. Matematický obsah tvorí učivo o zlomkoch a výpočet celku z časti. Návodné úlohy sú preto dvoch základných druhov: zlomky (NÚ A, B) a počítanie odzadu (NÚ C, D). Preverenie, či žiak zvládne kombináciu oboch fenoménov, by mala tvoriť NÚ E.

Stručné riešenie:

Rozmýšľajme spätne. Siedmy trpaslík dostal 7 jablák a $\frac{1}{9}$ zvyšku. Aby bola $\frac{1}{9}$ zvyšku vyjadriteľná celými jablkami, musel by byť zvyšok 0, 9, 18, 27, 36 atď. Keďže hľadáme najmenší možný počet, budeme skúšať číslo 0. To znamená, že Snehulienke by ostalo 0 jablák a siedmy trpaslík dostal 7 jablák. Spolu bolo pred týmto delením 7 jablák, čo je $\frac{8}{9}$ predchádzajúceho zvyšku. $\frac{8}{9}z = 7 \Rightarrow \frac{1}{9}z = \frac{7}{8} \wedge z = \frac{63}{8}$. Nevyšlo nám celé číslo, čiže musíme začať s väčším počtom jablák. Pri deviatich jablkách by dostala Snehulienka 8 jablák.

Ďalšie úvahy sme pre zjednodušenie vypísali tabuľkovým spôsobom:

trpaslík x	$x + \frac{1}{9}$ zvyšku	pred delením bolo jablák	teda $\frac{8}{9}$ zvyšku =	predchádzajúci zvyšok	$\frac{1}{9}$ tohto zvyšku
7.	$7 + 1 = 8$	$8 + 8 = 16$	16	18	2

6.	$6 + 2 = 8$	$16 + 8 = 24$	24	27	3
5.	$5 + 3 = 8$	$24 + 8 = 32$	32	36	4
4.	$4 + 4 = 8$	$32 + 8 = 40$	40	45	5
3.	$3 + 5 = 8$	$40 + 8 = 48$	48	54	6
2.	$2 + 6 = 8$	$48 + 8 = 56$	56	63	7
1.	$1 + 7 = 8$	$56 + 8 = 64$			

Jablk bolo v košíku 64 a každý z nich včítane Snehulienky získal 8.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Táto úloha bude ťažká na zápis, lebo zvyšok sa stále mení. Navyiac predpokladáme, že sa žiaci budú schopní zaplietť pri vypočítavaní devätiny. Dôležité je preto sledovať, či si žiak vymyslel nejaký rozumný systém na výpočet zvyškov a počtov jabĺk, ktoré trpaslík získal. Skusmé lineárne riešenie (samozrejme s preukázaním minima) by malo byť tiež hodnotené ako dobré, ale nižšou známkou.

Návodné úlohy:

- A) Vypočítaj $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{13}{14}$ z 280. Vypočítaj $\frac{1}{3}$ z $\frac{8}{7}$ z 231.
- B) Urči celok, ak $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$ sú 72.
- C) Chlapci hrali pogy. Juro najprv polovicu prehrál, potom 4 vyhral a nakoniec ešte svoj počet pogov zdvojnásobil na 54. Koľko pogov mal pred začiatkom hry?
- D) Na troch tanierikoch boli čerešne. Prišla mama a videla, že na prvom je ich najviac, tak preložila z prvého 12 čerešní na druhý a 6 na tretí tanier. Dominike sa zdalo, že teraz je na druhom najviac, tak z neho preložila 12 na tretí a 6 na prvý. Prišiel otec, zistil, že všade je rovnako veľa a všetkých 28 čerešní z prvého taniera zjedol. Koľko čerešní bolo pôvodne na jednotlivých tanieroch?
- E) Osmijanko bol hladný, keď zrazu našiel strom plný zrelých pomarančov. Osmijanko sa potešil a hneď si nejaké natrhal. Odtrhol si presne polovicu všetkých pomarančov, ktoré na strome rástli, a ešte polovicu pomaranča. Zjedol ich a stále bol hladný. Odtrhol si nejaké ďalšie a znova to bola polovica zo všetkých pomarančov, čo boli na strome, a ešte polovicu pomaranča. Zjedol aj tie, no hlad stále neutišil, preto si odtrhol ešte niekoľko pomarančov - presne polovicu z tých, čo ostali na strome, a polovicu pomaranča k tomu. Konečne sa najedol a veselo vykročil. Koľko najmenej pomarančov zjedol Osmijanko? Osmijanko trhal iba celé pomaranče. (pikomat 2002)

Z8-I-5

Zadanie:

Martin má z matematiky rôzne známky, ktorých aritmetický priemer je 2,1. Päťorku nemá ani jednu. Zato jednotky tvoria 35% a dvojky 30% všetkých jeho známok z matematiky.

Koľko percent všetkých Martinových známok z matematiky tvoria trojky a koľko štvorky?

Koľko má známok z matematiky, ak trojok má 5?

(Dillingerová)

Poznámky k úlohe:

Ide o úlohu na aritmetický priemer, kde je známa jeho hodnota, hodnoty, ktoré boli dosiahnuté, ale nie je známa početnosť dosiahnutých hodnôt. U dvoch hodnôt je táto početnosť vyjadrená ich percentuálnym zastúpením v súbore všetkých dosiahnutých hodnôt. Riešiteľ teda musí pracovať s percentami a aritmetickým priemerom súčasne. NÚ A, B majú za úlohu preopakovať aritmetický priemer a percentá v jednoduchých úlohách. NÚ C a D

pracujú s aritmetickým priemerom. Majú upozorniť žiakov, ako súvisí hodnota priemeru so súčtom nameraných hodnôt. Posledným úskalím by mohlo byť matematické modelovanie situácie zo zadania. Tomuto sme sa už venovali pri úlohe Z8-I-1. Učiteľ môže žiakom ponúknuť slovné úlohy publikované pri spomínanej úlohe, konkrétne NÚ A, B, C, D, E, alebo použiť úlohy s tematikou podobnou úlohe Z8-I-5 (NÚ E).

Stručné riešenie:

Všetkých známok je 100%. teda na trojky a štvorky ostáva $100\% - 35\% - 30\% = 35\%$. Označme počet percent trojok p , potom počet percent štvoriek je $35 - p$. Ešte označme počet všetkých známok z . Pre výpočet aritmetického priemeru potom platí:

$$2,1 = \frac{\frac{35}{100}z + \frac{30}{100}z \cdot 2 + \frac{p}{100}z \cdot 3 + \frac{35-p}{100}z \cdot 4}{z}$$

Počtom známok z možno zlomok krátiť, takže dostaneme rovnicu s jednou neznámou p :

$$210 = 35 + 30 \cdot 2 + p \cdot 3 + (35 - p) \cdot 4,$$

ktorej riešením je $p = 25$.

Trojok má Martin 25% a štvoriek $35\% - 25\% = 10\%$.

Z matematiky má Martin $5 \cdot \frac{100}{25} = 20$ známok.

Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Predpokladáme, že každý, kto odpovie na prvú otázku, zvládne aj druhú hravo. Môžu sa objaviť riešenia, kde žiak predpokladá, že celkový počet známok je nejaké konkrétne číslo. Za rozumné v tomto postupe pokladáme počet 100, alebo jeho prirodzený násobok. Bez slovného zdôvodnenia, prečo možno takto počítať, by riešenie nemalo byť akceptované. Každopádne musí však žiak napísať postup. Z neho by malo byť viditeľné, že nejde o skúšanie, pre ktoré úloha nie je vhodná!

Návodné úlohy:

- A) Roman na telesnej výchove v skoku do diaľky z miesta mal štyri pokusy a naskákal: 1,48 m, 1,56 m, 1,43 m a 1,53 m. Tomáš naskákal pri svojich pokusoch: 1,62 m, 1,57 m a 1,64 m. Aký dlhý (v metroch) je priemerný Romanov skok? Aký dlhý (v metroch) je priemerný Tomášov skok? Aký dlhý (v metroch) je priemerný skok dvojčlenného družstva Roman + Tomáš?
 - B) Po písomke ohlásila pani učiteľka: Jednotku dostalo 64% a dvojku 12% z vás. Najhoršia známka bola trojka. Koľko percent žiakov triedy malo trojku? Koľko je žiakov v triede, ak horšiu známku ako jednotku mali deviati?
 - C) Mišo s Jožom majú robiť spolu laboratórnu prácu z fyziky. Mišo už všetko urobil a aritmetický priemer jeho 8 nameraných hodnôt je 14,25. Jožo práve skončil svoje merania, kde nameral hodnoty 14, 14,2, 13,8 a 14,8. Vypočítaj aritmetický priemer všetkých meraní oboch chlapcov. (Pozor, 14,21 nie je správny výsledok!)
 - D) Radka má z matematiky 12 známok, ktorých aritmetický priemer je 3. Koľko jednotiek musí dostať, aby jej „vychádzala“ dvojka, t.j. aritmetický priemer by bol menší ako 2,5?
- Získavať samé jednotky sa jej však nedarí. Po každej jednotke dostane aj jednu dvojku. Koľko známok musí teraz získať, aby to „vyšlo“ na dvojku? Aký priemer potom dosiahnu jej známky?

- E) Kristínka má z matematiky 18 známok a priemer 2,5. Päťorku ani jednotku nemá ani jednu, trojok je päť. Koľko je dvojok a koľko je štvoriek?

Z8-I-6

Zadanie:

Stredná priečka delí lichobežník na dve časti, z ktorých menšia má obsah 18 cm^2 . Aký obsah bude mať väčšia z častí, na ktoré delí tento lichobežník jeho uhlopriečka, ak menšia má obsah 16 cm^2 ?

(Bednářová)

Poznámky k úlohe:

Druhá geometrická úloha v tejto sérii je zameraná na planimetriu. Na jej úspešné zvládnutie si potrebuje žiak zopakovať všetky vlastnosti lichobežníka a uvedomiť si, ktoré sú pre úlohu použiteľné a ktoré nie (NÚ A, C). V NÚ B, D, E postupne meníme zadávané prvky, aby si žiaci vedeli jednotlivé potrebné dĺžky vyjadriť zo zadaných informácií, čo je aj pre danú úlohu dôležité. Najťažšia je NÚ F, ktorá svojou prácou so vzorcami a vyjadrovaním neznámej zo vzorca veľmi pripomína úlohu domáceho kola.

Stručné riešenie:

Použijeme označenia ako na obrázku bol lichobežník hocaký, vždy ho takejto polohy a označiť.

Určite platí:

$$e = \frac{a+c}{2}$$

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$S_{ACD} = \frac{c \cdot v}{2} = 16$$

$$S_{XYCD} = \frac{e+c}{2} \cdot \frac{v}{2} = 18$$

Z prvého a posledných dvoch vzťahov si vyjadríme dĺžky základní.

$$c = \frac{32}{v} \Rightarrow e = \frac{a + \frac{32}{v}}{2} = \frac{v \cdot a + 32}{2v} \Rightarrow 18 = \frac{\frac{v \cdot a + 32}{2v} + \frac{32}{v}}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{96 + v \cdot a}{4v} \cdot \frac{v}{2} = \frac{96 + v \cdot a}{8} \Rightarrow a = \frac{48}{v}$$

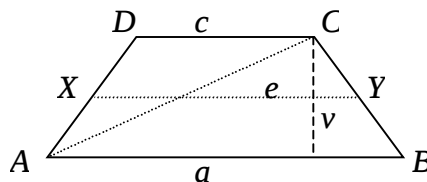
Tieto dosadíme do vzorca pre výpočet obsahu lichobežníka:

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{\frac{48}{v} + \frac{32}{v}}{2} \cdot v = \frac{80}{2v} \cdot v = \frac{80}{2} = 40 [\text{cm}^2].$$

Väčšia z častí bude mať obsah $S_{ABYX} = S - S_{CDXY} = 24 [\text{cm}^2]$.

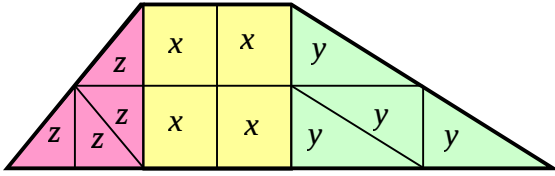
Aké riešenia (zápisy) môžeme od žiakov očakávať a požadovať:

Samozrejme ostáva prenechané riešiteľovi, či bude vypočítavať obsah celého lichobežníka alebo sa bude snažiť hneď vytvoriť vzorec pre obsah väčšej časti. Možnosťou je tiež dosádzanie za výrazy typu $c \cdot v = 32$, $a \cdot v = 48$. Kompletne riešenie by malo obsahovať všetky použité vzorce. Inou možnosťou je rozrezávanie lichobežníka a využívanie vzťahov, ktoré sa dajú ľahko pri tomto postupe objaviť (Obr. č. 6). Napriek názornosti takéhoto riešenia nepredpokladáme, že sa objaví.



Obr. 5

č. 5. Nech by
vieme otočiť do



Obr. 6

$$S_{XYCD} = z + 2x + y = \frac{1}{4}S + x = 18$$

$$S_{ABYX} = 3z + 2x + 3y = \frac{3}{4}S - x$$

$$x = \frac{c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

atd'.

Návodné úlohy:

- A) Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Nech $|AB| > |CD|$. Ktorý z trojuholníkov ABC , CDA má väčší obsah?
- B) Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Základňa AB má dĺžku 8 cm, CD 6 cm. Výška lichobežníka $v = 3$ cm. Vypočítaj obsah celého lichobežníka a obsah trojuholníka ABD .
- C) Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Zistite, ktorý z trojuholníkov CDA , CDB má väčší obsah.
- D) Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Základňa AB má dĺžku 8 cm, CD 6 cm. Obsah trojuholníka ABD je 24 cm^2 . Vypočítaj obsah celého lichobežníka.
- E) Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Základňa AB má dĺžku 8 cm, CD 6 cm. Obsah trojuholníka ABD je 24 cm^2 . Vypočítaj obsah menšej z častí, na ktoré delí tento lichobežník jeho stredná priečka.
- F) Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Obsah trojuholníka BCD je 18 cm^2 . Obsah trojuholníka ABD je 24 cm^2 . Vypočítaj obsah menšej z častí, na ktoré delí tento lichobežník jeho stredná priečka.

Kategória Z9
riešenia domáceho kola

Kolektívy úlohových komisií MO ČR a SR
Preklad RNDr. M. Dillingerová

Z9-I-1

V Jurkovej stavebnici je 64 rovnako veľkých kociek. Steny týchto kociek sú jednofarebné – biele alebo čierne. Zo všetkých kociek sa dá zložiť jedna veľká kocka, ktorej každá stena je z polovice biela a z polovice čierna. Koľko najviac celkom bielych kociek môže byť v Jurkovej stavebnici? Načrtnite obrázok, ako by táto veľká kocka vyzerala pri pohľade zdola, zozadu, spredu, zhora, zľava a sprava.

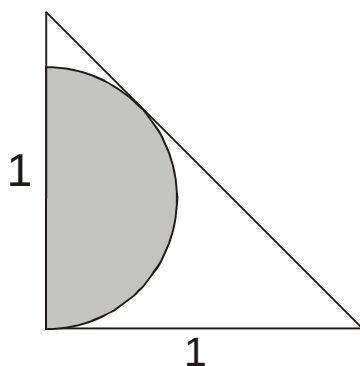
(Bednářová)

Riešenie:

Pozri kategórie Z8, príklad Z8-I-3.

Z9-I-2

Určite plochu polkruhu vpísaného pravouhlému rovnoramennému trojuholníku (pozri Obr.). Údaje sú v decimetoch.



Obr. 1

(Tlustý)

Riešenie:

Trojuholník ABC je rovnoramenný pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C (Obr. 2). Odvesny majú dĺžky

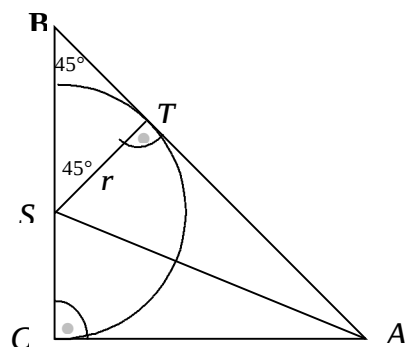
$|CA| = |CB| = 1$ dm, prepona má dĺžku $|AB| = \sqrt{2}$ dm

(Pytagorova veta). Preto $|\angle CAB| = |\angle CBA| = 45^\circ$. Polomer r polkruhu je v bode dotyku T kolmý na preponu trojuholníka AB . Potom trojuholník BST je tiež pravouhlý rovnoramenný. Je $\triangle AST \cong \triangle ASC$?

Strana AS je spoločná, $|ST| = |SC| = r$ a

$|\angle STA| = |\angle SCA| = 90^\circ$. Takže podľa vety Ssu sú uvedené trojuholníky zhodné a $|TA| = |CA| = 1$ dm.

$|TB| = |AB| - |AT| = \sqrt{2} - 1$ a nakoľko je trojuholník BST rovnoramenný, platí pre polomer r kruhu $r = |TS| = |TB| = \sqrt{2} - 1$. Polkruh má potom obsah



Obr. 2

$$S = \frac{1}{2}pr^2$$

$$S = \frac{1}{2}p(\sqrt{2}-1)^2$$

$$S = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}p$$

$$S \doteq 0,2695 \text{ dm}^2$$

Z9-I-3

Tromi spôsobmi napíšte číslo 2004 ako súčet niekoľkých po sebe idúcich prirodzených čísel.
(Hozová)

Riešenie:

Pri nepárnom počte sčítancov môžeme prostredný označiť ako a . Ak bude sčítancov n , vypočítame súčet ako $2004 = na$. Pretože n je nepárne, dostávame z rozkladu čísla 2004 nasledujúce možnosti:

n	a	sčítance
3	668	$667 + 668 + 669$
167	12	$-71 + (-70) + (-69) + \mathbf{K} + 93 + 94 + 95$
501	4	$-246 + (-245) + (-244) + \mathbf{K} + 252 + 253 + 254$

Pri párnom počte sčítancov označíme menší z prostredných dvoch a . Ak bude sčítancov n , vypočítame súčet ako $2004 = na + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(2a+1)$. Teraz je síce n párne, ale výraz $2a+1$ je nepárny, takže dostávame nasledujúce možnosti:

$2a+1$	n	a	sčítance
3	1336	1	$-666 + (-665) + (-664) + \mathbf{K} + 667 + 668 + 669$
167	24	83	$72 + 73 + 74 + \mathbf{K} + 95$
501	8	250	$247 + 248 + 249 + \mathbf{K} + 254$

Z uvedených možností sú dobré len $667 + 668 + 669$, $72 + 73 + 74 + \mathbf{K} + 95$ a $247 + 248 + 249 + \mathbf{K} + 254$.

Z9-I-4

Ak v príklade na násobenie dvoch prirodzených čísel zaokrúhlime 1. činiteľa na desiatky, súčin sa zväčší o 48. Ak v pôvodnom príklade zaokrúhlime 2. činiteľa na desiatky, pôvodný súčin sa zmenší o 1512. Nájdite pôvodný príklad (všetky možnosti).

(Dillingerová)

Riešenie:

V prvom prípade sa súčin po zaokrúhlení činiteľa zväčšil, to znamená, že sa prvé číslo zaokrúhľovaním na desiatky zväčšuje. Zväčšenie môže byť o 1, 2, 3, 4 alebo 5 a z čísla a vzniká číslo $a+x$, kde $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

$$(a+x)b = ab + 48 \Rightarrow xb = 48$$

x	1	2	3	4	5
b	48	24	16	12	neexistuje

Pri druhom zaokrúhľovaní sa súčin zmenšil, to znamená, že číslo b zaokrúhlujeme nadol. Do úvahy prichádzajú iba dvojice $[x,b] \in \{[2,24], [4,12]\}$.

Ak $b = 24$, tak pozmenený príklad je $20a = 24a - 1512$, čiže $a = 378$. Číslo a sa pri zaokrúhľovaní na desiatky naozaj zväčší o 2 ($x = 2$).

Ak $b = 12$, tak pozmenený príklad je $10a = 12a - 1512$, čiže $a = 756$. Číslo a sa pri zaokrúhľovaní na desiatky naozaj zväčší o 4 ($x = 4$).

Pôvodný príklad bol buď 378.24, alebo 756.12.

Z9-I-5

Danka, Milka, Jožko a Peťo sa vážili. Najľahší a najťažší z nich vážia dohromady 113 kg. Danka, Milka a Jožko vážia spolu 169 kg. Milka, Jožko a Peťo majú spolu 166 kg a Danka s Peťom 99 kg. Koľko váži každý z nich, keď Jožko nie je najťažší?

(Ptáčková)

Riešenie:

Označme hmotnosti detí začiatočnými písmenami ich mien. Zo zadania môžeme zostaviť rovnice:

$$\begin{array}{lll} d + m + j = 169 & d + m + j - (p + m + j) = 169 - 166 & d + p + d - p = 99 + 3 \\ p + m + j = 166 & \Rightarrow & d - p = 3 \quad \Rightarrow \quad 2d = 102 \\ d + p = 99 & & d + p = 99 \quad \Rightarrow \quad d = 51 \text{ [kg]} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p &= 48 \text{ [kg]} \\ m + j &= 118 \end{aligned}$$

Teraz príde na rad podmienka, že najľahší a najťažší spolu vážia 113 kg a Jožko nie je najťažší. Z toho vyplýva, že najťažšia je Milka. Jožko nemôže byť najľahší, lebo by s Milkou spolu museli vážiť 113 kg. Takže najľahší je Peťo.

$$\begin{aligned} j + m &= 118 \\ p + m &= 113 \quad \Rightarrow \quad m = 113 - 48 = 65 \text{ [kg]} \\ p &= 48 \quad \Rightarrow \quad j = 118 - 65 = 53 \text{ [kg]} \end{aligned}$$

Danka má 51 kg, Milka 65 kg, Jožko 53 kg a Peťo 48 kg.

Z9-I-6

Nájdite prirodzené čísla a, b , ktoré spĺňajú podmienky:

- $3a + b = 165$,
- najmenší spoločný násobok čísel a, b je desaťkrát väčší než najväčší spoločný deliteľ čísel a, b .

(Tlustý)

Riešenie:

Aby bola splnená druhá podmienka, musí platiť $n(a, b) = 10D(a, b)$. Označíme si $D(a, b) = D$. Potom $a = xD$ a $b = yD$, kde x, y sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Pre najmenší spoločný násobok potom platí: $n(a, b) = xyD$. Porovnaním s druhou podmienkou úlohy dostávame $xy = 10$.

Pre prirodzené nesúdeliteľné čísla x, y potom dostávame štyri možnosti.

- $x = 1, y = 10 \Rightarrow a = D, b = 10D$
- $x = 2, y = 5 \Rightarrow a = 2D, b = 5D$
- $x = 5, y = 2 \Rightarrow a = 5D, b = 2D$
- $x = 10, y = 1 \Rightarrow a = 10D, b = D$

Pre všetky štyri možnosti overíme platnosť prvej podmienky:

- $3D + 10D = 165 \Rightarrow 13D = 165$, čo nemá v obore prirodzených čísel riešenie.
- $6D + 5D = 165 \Rightarrow 11D = 165 \Rightarrow D = 15$, dosadením do vyjadrení hľadaných čísel dostávame riešenie $a = 30$, $b = 75$.
- $15D + 2D = 165 \Rightarrow 17D = 165$, čo nemá v obore prirodzených čísel riešenie.
- $30D + D = 165 \Rightarrow 31D = 165$, čo nemá v obore prirodzených čísel riešenie.

Hľadané čísla sú 30 a 75.

53. ročník Matematickej olympiády Komentáre pre kategórie Z4 - Z9

Náklad: 2480 výtlačkov
Vydala IUVENTA pre vnútornú potrebu MŠ SR

© Slovenská komisia Matematickej olympiády, 2003
Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová
Recenzent: Doc. Pavel Novotný